PROBLEMA B.1. Dado el sistema de ecuaciones lineales que depende de los parámetros a, b y c

$$\begin{cases} 2ax + by + z = 3c \\ 3x - 2by - 2cz = a \\ 5ax - 2y + cz = -4b \end{cases}$$

se pide:

a) Justificar razonadamente que para los valores de los parámetros a = 0, b = – 1 y c = 2 el sistema es incompatible. *(3 puntos)*

b) Determinar razonadamente los valores de los parámetros a, b y c, para los que se verifica que (x, y, z) = (1, 2, 3) es solución del sistema. *(4 puntos)*

c) Justificar si la solución (x, y, z) = (1, 2, 3) del sistema del apartado b) es, o no, única. *(3 puntos)*

Solución:

a) Justificar razonadamente que para los valores de los parámetros a = 0, b = – 1 y c = 2 el sistema es incompatible.

Para estos valores de los parámetros el sistema queda:

$$\begin{cases} -y + z = 6 \\ 3x + 2y - 4z = 0 \\ -2y + 2z = 4 \end{cases}$$

Ahora podemos proceder a estudiar este sistema o fijarnos en la primera y tercera ecuaciones que tienen proporcionales los coeficientes de las incógnitas pero no los términos independientes. Veámoslo,

$$\begin{cases} -y + z = 6 \\ -2y + 2z = 4 \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} = -2 + 2 = 0 \\ |2| = 2 \neq 0 \end{array}\right\} \rightarrow \quad rang(A) = 1 \\ \\ \begin{vmatrix} 1 & 6 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 4 - 12 = -8 \neq 0 \quad \rightarrow \quad rang(A') = 2 \end{array}\right\} \textit{Sistema Incompatible}$$

Por lo tanto, como la 1ª y 3ª ecuaciones son incompatible el sistema inicial también es incompatible.

b) ¿a, b y c? / (x , y , z) = (1 , 2 , 3) sea solución del sistema.

Dando a las incógnitas los valores indicados, el sistema queda:

$$\begin{cases} 2a + 2b + 3 = 3c \\ 3 - 4b - 6c = a \\ 5a - 4 + 3c = -4b \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2a + 2b - 3c = -3 \\ -a - 4b - 6c = -3 \\ 5a + 4b + 3c = 4 \end{cases}$$

Estudiemos este nuevo sistema cuyas incógnitas son a, b y c.

La matriz ampliada del sistema es:

$$A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & -3 & -3 \\ -1 & -4 & -6 & -3 \\ 5 & 4 & 3 & 4 \end{array}\right)$$

Estudiemos el rango de la matriz de coeficientes, A. A es una matriz 3x3, luego su máximo rango posible es 3.

$$|2| = 2 \neq 0 \quad \rightarrow \quad rang(A) \geq 1$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -1 & -4 \end{vmatrix} = -8 + 2 = -6 \neq 0 \quad \rightarrow \quad rang(A) \geq 2$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 2 & -3 \\ -1 & -4 & -6 \\ 5 & 4 & 3 \end{vmatrix} = -24 + 12 - 60 - 60 + 48 + 6 = -78 \neq 0 \quad \rightarrow \quad rang(A) = 3$$

Como el máximo rango posible de A´ (que es 3x4) es también 3, entonces rang(A´) = 3
Por lo que rang(A) = rang(A´) = 3 = nº de incógnitas → Sistema Compatible Determinado.
La solución del sistema será:

$$a = \frac{\begin{vmatrix} -3 & 2 & -3 \\ -3 & -4 & -6 \\ 4 & 4 & 3 \end{vmatrix}}{-78} = \frac{36 + 36 - 48 - 48 - 72 + 18}{-78} = \frac{-78}{-78} = 1$$

$$b = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -3 & -3 \\ -1 & -3 & -6 \\ 5 & 4 & 3 \end{vmatrix}}{-78} = \frac{-18 + 12 + 90 - 45 + 48 - 9}{-78} = \frac{78}{-78} = -1$$

$$c = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 2 & -3 \\ -1 & -4 & -3 \\ 5 & 4 & 4 \end{vmatrix}}{-78} = \frac{-32 + 12 - 30 - 60 + 8 + 24}{-78} = \frac{-78}{-78} = 1$$

Finalmente, (x , y , z) = (1 , 2 , 3) es solución del sistema para a = 1 , b = – 1 y c = 1.

c) La solución (x , y , z) = (1 , 2 , 3) es única ya que en el apartado anterior para estos valores de las incógnitas hemos obtenido una única solución para los valores de los parámetros.