PROBLEMA B.2. Sea r la recta de vector director (2, – 1 , 1) que pasa por el punto P = (0, 3, – 1). Se pide:

a) Hallar razonadamente la distancia del punto A = (0, 1, 0) a la recta r. *(4 puntos)*
b) Calcular razonadamente el ángulo que forma la recta que pasa por los puntos P y A con la recta r en el punto P. *(4 puntos)*
c) Si Q es el punto donde la recta r corta al plano de ecuación z = 0, comprobar que el triángulo de vértices APQ tiene ángulos iguales en los vértices P y Q. *(2 puntos)*

Solución:
De la recta r conocemos un punto y su vector director, es decir:

$$r:\begin{cases} P_r(0,3,-1) \\ \overrightarrow{v_r}(2,-1,1) \end{cases}$$

a) d (A , r) siendo A (0 , 1 , 0)

$$d(A,r)=\frac{\left|\overrightarrow{P_rA}\times\overrightarrow{v_r}\right|}{\left|\overrightarrow{v_r}\right|}$$

$$\overrightarrow{P_rA}=(0,1,0)-(0,3,-1)=(0,-2,1)$$

$$\overrightarrow{P_rA}\times\overrightarrow{v_r}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix}=\vec{i}\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}-\vec{j}\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}+\vec{k}\begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}=-\vec{i}+2\vec{j}+4\vec{k}=(-1,2,4)$$

$$\left|\overrightarrow{P_rA}\times\overrightarrow{v_r}\right|=\sqrt{(-1)^2+2^2+4^2}=\sqrt{21}$$

$$\left|\overrightarrow{v_r}\right|=\sqrt{2^2+(-1)^2+1^2}=\sqrt{6}$$

$$d(A,r)=\frac{\sqrt{21}}{\sqrt{6}}=\sqrt{\frac{21}{6}}=\sqrt{\frac{7}{2}}=\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{14}}{2}\ u.\,l.$$

b)

$$\text{Ángulo entre}\begin{cases} r \ \rightarrow\ \overrightarrow{v_r}(2,-1,1) \\ s\begin{cases} P(0,3,-1) \\ A(0,1,0) \end{cases} \rightarrow\ \overrightarrow{v_s}=(0,3,-1)-(0,1,0)=(0,2,-1) \end{cases}$$

$$\text{siendo}\quad \alpha=\left(\widehat{r,s}\right)\ \rightarrow\ \cos\alpha=\frac{\left|\overrightarrow{v_r}\cdot\overrightarrow{v_s}\right|}{\left|\overrightarrow{v_r}\right|\,\left|\overrightarrow{v_s}\right|}=\frac{|(2,-1,1)\cdot(0,2,-1)|}{\sqrt{6}\ \sqrt{2^2+(-1)^2}}=\frac{|-2-1|}{\sqrt{6}\ \sqrt{5}}=\frac{3}{\sqrt{30}}\ \rightarrow\begin{cases}\alpha_1=56'7891^{\circ} \\ \alpha_2=303'2109^{\circ}\end{cases}$$

pero como α es el ángulo entre dos rectas (α ≤ 90º) entonces α = 56´7891º

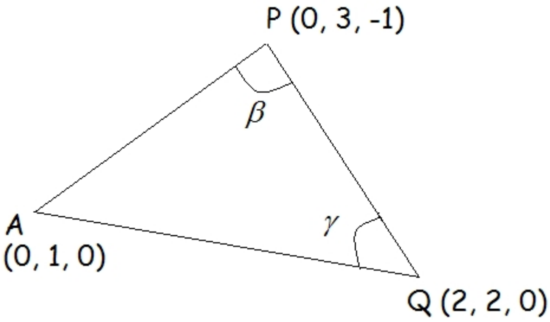
c) Q = r ∩ { z = 0 }
Obtengamos el punto Q,

$$r:\begin{cases} P_r(0,3,-1) \\ \overrightarrow{v_r}(2,-1,1) \end{cases}\ \rightarrow\ r:\begin{cases} x=2\lambda \\ y=3-\lambda \\ z=-1+\lambda \end{cases}\qquad \lambda\in\Re$$

La intersección de esta recta con el plano $z = 0$ la obtenemos resolviendo la ecuación:
$-1 + \lambda = 0 \;\rightarrow\; \lambda = 1$

Por lo tanto el punto de corte será: $\begin{cases} x = 2\,.\,1 = 2 \\ y = 3 - 1 = 2 \\ z = -1 + 1 = 0 \end{cases} \rightarrow \quad Q(2, 2, 0)$

El triángulo APQ será,



Los ángulos que tenemos que comprobar que son iguales son:

$\beta = (\,\widehat{\overrightarrow{PA}, \overrightarrow{PQ}}\,)$ *y* $\gamma = (\,\widehat{\overrightarrow{QA}, \overrightarrow{QP}}\,)$

Cálculo de β,

$\overrightarrow{PA} = (0,1,0) - (0,3,-1) = (0,-2,1)$

$\overrightarrow{PQ} = (2,2,0) - (0,3,-1) = (2,-1,1)$

$$\cos\beta = \frac{(0,-2,1)\;(2,-1,1)}{\sqrt{0^2 + (-2)^2 + 1^2}\;\sqrt{2^2 + (-1)^2 + 1^2}} = \frac{2+1}{\sqrt{5}\,\sqrt{6}} = \frac{3}{\sqrt{30}}$$

Cálculo de γ,

$\overrightarrow{QA} = (0,1,0) - (2,2,0) = (-2,-1,0)$

$\overrightarrow{QP} = (0,3,-1) - (2,2,0) = (-2,1,-1)$

$$\cos\beta = \frac{(-2,-1,0)\;(-2,1,-1)}{\sqrt{(-2)^2 + (-1)^2 + 0^2}\;\sqrt{(-2)^2 + 1^2 + (-1)^2}} = \frac{4-1}{\sqrt{5}\,\sqrt{6}} = \frac{3}{\sqrt{30}}$$

Como $\cos\beta = \cos\gamma$ y β y γ son ángulos de un triángulo (β y $\gamma < 180º$) entonces $\beta = \gamma$, que es lo que queríamos comprobar.