PROBLEMA A.1. Sea el sistema de ecuaciones

$$S:\begin{cases} x+y+z=m \\ 2x+3z=2m+1 \\ x+3y+(m-2)z=m-1 \end{cases}$$

donde m es un parámetro real. Obtener **razonadamente**:

a) Todas las soluciones del sistema S cuando $m=2$. *(4 puntos)*

b) Todos los valores de m para los que el sistema S tiene una solución única. *(2 puntos)*

c) El valor de m para el que el sistema S admite la solución (x,y,z) = $\left(\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, 0\right)$ *(4 puntos)*

Solución:

a) Para m = 2 el sistema a resolver es:

$$\begin{cases} x+y+z=2 \\ 2x+3z=5 \\ x+3y=1 \end{cases}$$ *de este sistema, sus matriz ampliada es,* $A'=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 3 & 5 \\ 1 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right)$

Estudiemos el rango de A

$$\left.\begin{array}{l} |1|=1\neq 0 \quad \rightarrow \quad ran(A)\geq 1 \\ \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix}=-2\neq 0 \quad \rightarrow \quad ran(A)\geq 2 \\ \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \\ 1 & 3 & 0 \end{vmatrix}=6+3-9=0 \end{array}\right\} \rightarrow \quad ran(A)=2$$

Estudiemos el rango de A´, como ran(A) = 2 → ran(A´) ≥ 2. Ampliamos el menor de orden 2 no nulo de A´, que es el obtenido anteriormente en A, con la cuarta columna y tercera fila:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 5 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix}=12+5-15-2=0$$ *Por lo tanto ran(A´) = 2*

Lo obtenido es: ran(A) = ran(A´) = 2 < 3 = nº incógnitas → Sistema compatible indeterminado.

Resolvemos el sistema usando las ecuaciones (1ª y 2ª) e incógnitas (x, y) que han proporcionado este rango.

El sistema a resolver es: $\begin{cases} x+y=2-z \\ 2x=5-3z \end{cases}$

Resolviéndolo por Cramer,

$$x=\frac{\begin{vmatrix} 2-z & 1 \\ 5-3z & 0 \end{vmatrix}}{-2}=\frac{-5+3z}{-2}=\frac{5}{2}-\frac{3}{2}z$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 2-z \\ 2 & 5-3z \end{vmatrix}}{-2}=\frac{1(5-3z)-2(2-z)}{-2}=\frac{5-3z-4+2z}{-2}=\frac{1-z}{-2}=\frac{-1+z}{2}=\frac{-1}{2}+\frac{1}{2}z$$

Finalmente, para m = 2 las soluciones del sistema S son: $\begin{cases} x=\frac{5}{2}-\frac{3}{2}\lambda \\ y=\frac{-1}{2}+\frac{1}{2}\lambda \quad \lambda\in\Re \\ z=\lambda \end{cases}$

b) Como el sistema tiene tres ecuaciones y tres incógnitas tendrá solución única cuando sea un sistema compatible determinado. Calculemos los valores de m.

$$A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & m \\ 2 & 0 & 3 & 2m+1 \\ 1 & 3 & m-2 & m-1 \end{array}\right)$$

A es 3x3, luego el máximo rango de A es 3; A´ es 3x4, luego el máximo rango de A´ es 3. Por lo tanto empezamos estudiando el rango de A.
Estudiamos el menor de orden 3 de A,

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \\ 1 & 3 & m-2 \end{vmatrix} = 6+3-9-2(m-2) = -2m+4$$

$$-2m+4=0 \quad \rightarrow \quad -2m=-4 \quad \rightarrow \quad m=\frac{-4}{-2}=2$$

Luego, para $m \neq 2 \rightarrow |A| \neq 0 \rightarrow$ *ran(A) =3 y como el máximo rango posible de A´ es 3, ran(A´) = 3, luego: para* $m \neq 2$, *ran(A) = ran(A´) = 3 = nº incógnitas* $\rightarrow$ *Sistema compatible determinado*

Finalmente, el sistema tiene solución única cuando $m \neq 2$

c) Para (x,y,z) = $\left(\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, 0\right)$ *el sistema quedará*

$$\begin{cases} \frac{3}{2}+\left(\frac{-1}{2}\right)+0 = m \\ 2\,\frac{3}{2} + 3\,.\,0 = 2m+1 \\ \frac{3}{2}+3\left(\frac{-1}{2}\right)+(m-2)\,0 = m-1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 1=m \\ 3=2m+1 \\ 0=m-1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 1=m \\ 2=2m \\ 1=m \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 1=m \\ 1=m \\ 1=m \end{cases} \rightarrow \quad m=1$$

El sistema S admite la solución (x, y, z) = $\left(\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, 0\right)$ *para m = 1.*