PROBLEMA A.2. En el espacio se dan las rectas

$$r:\begin{cases} x+z=2 \\ 2x-y+z=0 \end{cases} \qquad y \qquad s:\begin{cases} 2x-y=3 \\ x-y-z=2 \end{cases}$$

Obtener **razonadamente**:

a) Un punto y un vector director de cada recta. *(3 puntos)*
b) La posición relativa de las rectas r y s. *(4 puntos)*
c) Determinar la ecuación del plano que contiene a r y es paralelo a s. *(3 puntos)*

Solución:

a) Calculemos las ecuaciones paramétricas de las rectas resolviendo los sistemas que las definen,

$$r:\begin{cases} x \quad +z=2 \\ 2x-y+z=0 \end{cases}$$

Como $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0,$ *resolvemos usando* x *e* y *como incógnitas principales.*

$$\begin{cases} x \quad = 2-z \\ 2x-y=-z \end{cases}$$

Sustituyendo el valor de x *en la 2ª ecuación:*

$2(2-z)-y=-z; \quad 4-2z-y=-z; \quad -y=-4+2z-z; \quad -y=-4+z; \quad y=4-z$

luego $r:\begin{cases} x=2-\lambda \\ y=4-\lambda \\ z=\lambda \end{cases} \quad \lambda \in \Re$ *y un punto y un vector director de la recta* r *serán:* $P_r=(2,4,0)$, $\vec{v}_r=(-1,-1,1)$

$$s:\begin{cases} 2x-y=3 \\ x-y-z=2 \end{cases}$$

Como $\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0,$ *resolvemos usando* z *e* y *como incógnitas principales.*

$$\begin{cases} -y \quad = 3-2x \\ -y-z=2-x \end{cases}$$

De la 1ª ecuación: $y=-3+2x$

Sustituyendo el valor de y *en la 2ª ecuación:*

$-(-3+2x)-z=2-x; \quad 3-2x-z=2-x; \quad -z=2-x-3+2x; \quad -z=-1+x; \quad z=1-x$

luego $r:\begin{cases} x=\mu \\ y=-3+2\mu \\ z=1-\mu \end{cases} \quad \mu \in \Re$ *y un punto y un vector director de la recta* s *serán:* $P_s=(0,-3,1)$, $\vec{v}_s=(1,2,-1)$

b) Estudiamos la posición relativa de las rectas r *y* s *a partir del sistema que se obtiene al igualar sus ecuaciones paramétricas,*

$$\begin{cases} 2-\lambda=\mu \\ 4-\lambda=-3+2\mu \\ \lambda=1-\mu \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -\lambda-\mu=-2 \\ -\lambda-2\mu=-7 \\ \lambda+\mu=1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \lambda+\mu=2 \\ \lambda+2\mu=7 \\ \lambda+\mu=1 \end{cases}$$

La 1ª y la 3ª ecuaciones son incompatibles, por lo tanto r *y* s *son paralelas o se cruzan.*

Veamos si los vectores directores de las rectas son paralelos, *Estudiemos el rango de la matriz formada por los vectores directores:* $\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

$$\left.\begin{array}{l} |1| = 1 \neq 0 \quad \rightarrow \quad ran(A) \geq 1 \\ \\ \begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1 + 2 = 1 \neq 0 \end{array}\right\} \rightarrow \quad ran(A) = 2,\ \textit{los vectores no son paralelos.}$$

Por lo tanto, las rectas r *y* s *se cruzan.*

c) Buscamos un plano π / $r \subset \pi$ *y* $\pi // s$*, por lo tanto del plano* π *conocemos* $\begin{array}{l} P_r \in \pi \\ \vec{v_r} \textit{ es director de } \pi \\ \vec{v_s} \textit{ es director de } \pi \end{array}$

Por lo tanto, las ecuaciones del plano π *serán:*

Ecuación paramétrica: $\pi : \begin{cases} x = 2 - \lambda + \mu \\ y = 4 - \lambda + 2\mu \quad \lambda, \mu \in \Re \\ z = \quad \lambda - \mu \end{cases}$

Ecuación general: $\begin{vmatrix} x-2 & y-4 & z \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 0$

$$(x-2)\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} - (y-4)\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} + z\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

$$(x-2)\,(-1) - (y-4)\,0 + z\,(-1) = 0$$

$$-x + 2 - z = 0; \quad x + z = 2$$

π: $x + z = 2$