PROBLEMA B.1. Se da la matriz

$$A=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 1\\ 0 & m & 0\\ 2 & 1 & m^2-1\end{pmatrix}$$

donde m es un parámetro real.

a) Obtener razonadamente el rango o característica de la matriz A en función de los valores de m. *(5 puntos)*

b) Explicar por qué es invertible la matriz A cuando $m = 1$. *(2 puntos)*

c) Obtener razonadamente la matriz inversa A^{-1} de A cuando m = 1, indicando los distintos pasos para la obtención de A^{-1}. Comprobar que los productos $A\,A^{-1}$ y $A^{-1}A$ dan la matriz unidad. *(3 puntos)*

Solución:

a) Rango de A.

$$\begin{vmatrix}-1 & 0 & 1\\ 0 & m & 0\\ 2 & 1 & m^2-1\end{vmatrix}=-m(m^2-1)-2m=-m^3+m-2m=-m^3-m$$

$$-m^3-m=0 \;\rightarrow\; -m(m^2+1)=0 \;\rightarrow \begin{cases}-m=0 \;\rightarrow\; m=0\\ m^2+1=0 \;\rightarrow\; m^2=-1;\ \text{sin } solución\end{cases}$$

Por lo tanto,

Si $m \neq 0$, ran(A) = 3

Si m=0,

$$A=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\\ 2 & 1 & -1\end{pmatrix}$$

$$como \quad \begin{vmatrix}-1 & 0\\ 2 & 1\end{vmatrix}=-1\neq 0 \;\rightarrow\; ran(A)=2$$

b) Para m = 1 sabemos, según lo calculado en el apartado anterior, que $|A| = -1^3-1=-1-1=-2\neq 0$, por lo tanto, cuando m = 1, existe la matriz inversa de A.

c) Cálculo de A^{-1} cuando m = 1

Para m = 1, $A=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\\ 2 & 1 & -1\end{pmatrix}$ y $|A| = -2$

$$\begin{pmatrix}-1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\\ 2 & 1 & -1\end{pmatrix},\ \textit{cálculo de los menores:}\ \begin{pmatrix}\begin{vmatrix}1 & 0\\ 1 & 0\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}0 & 0\\ 2 & 0\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}0 & 1\\ 2 & 1\end{vmatrix}\\ \begin{vmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}-1 & 1\\ 2 & 0\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}-1 & 0\\ 2 & 1\end{vmatrix}\\ \begin{vmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}-1 & 1\\ 0 & 0\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{vmatrix}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0 & -2\\ -1 & -2 & -1\\ -1 & 0 & -1\end{pmatrix},\ \textit{adjuntos:}\ \begin{pmatrix}0 & 0 & -2\\ +1 & -2 & +1\\ -1 & 0 & -1\end{pmatrix},$$

traspuesta: $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$. *Y finalmente* $A^{-1} = \frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{-2}\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1/2 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$

Luego $A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1/2 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$

Comprobemos los productos indicados,

$$A\,A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1/2 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1/2 & 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1.0+0.0+1.1 & -1\frac{-1}{2}+0.1+1\frac{-1}{2} & -1\frac{1}{2}+0.1+1\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

De forma similar obtendríamos el otro producto $A^{-1}\,A = \begin{pmatrix} 0 & -1/2 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1/2 & 1/2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I$

Luego, hemos comprobado que los productos $A\,A^{-1}$ *y* $A^{-1}A$ *dan la matriz unidad.*