PROBLEMA B.2. En el espacio se dan las rectas

$$r:\begin{cases} x=\lambda \\ y=1-\lambda \\ z=3 \end{cases} \qquad y \qquad s:\{x-1=y=z-3$$

Obtener **razonadamente**:

a) Un vector director de cada una de las rectas. *(2 puntos)*
b) La ecuación del plano perpendicular a la recta r que pasa por el punto (0,1,3). *(3 puntos)*
c) El punto de intersección de las rectas r y s *(2 puntos)* y la ecuación del plano π que contiene a estas rectas *r y s (3 puntos).*

Solución:

a) La ecuación de la recta r es la paramétrica, luego $\vec{v}_r=(1,-1,0)$

La ecuación de la recta s es la continua, luego $\vec{v}_s=(1,1,1)$

b) ¿Plano $\pi / \pi \perp r$ *y* $(0,1,3)\in \pi$*?*

Como $\pi \perp r \rightarrow \vec{n}_\pi=\vec{v}_r=(1,-1,0)$. *Por lo tanto la ecuación del plano* π *será:* $x-y+0\,.\,z+D=0$*; operando* $x-y+D=0$

Como $(0,1,3)\in\pi \rightarrow 0-1+D=0;\ D=1$

Finalmente, la ecuación del plano π *es:* $x-y+1=0$

c) Cálculo del punto $P=r\cap s$

Escribamos la ecuación paramétrica de la recta s: $\begin{cases} x=1+\mu \\ y=\mu \\ z=3+\mu \end{cases} \quad \mu\in\Re$

El punto P lo obtenemos resolviendo el sistema $\begin{cases} \lambda=1+\mu \\ 1-\lambda=\mu \\ 3=3+\mu \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \lambda-\mu=1 \\ \lambda+\mu=1, \\ \mu=0 \end{cases}$ *sustituyendo el valor de* μ *en la* 1^a *y en la* 2^a *ecuaciones:* $\begin{cases} \lambda=1 \\ \lambda=1 \end{cases}$. *Por lo que la solución del sistema es* $\lambda=1$ *y* $\mu=0$.

El punto P lo obtendremos sustituyendo el valor de λ *en la ecuación de la recta r o el valor de* μ *en la ecuación de la recta s.*

Sustituyendo el valor de $\lambda=1$ *en la recta r, obtenemos* $P=(1,0,3)$

Cálculo del plano π *que contiene a r y s. El plano* π *contendrá al punto P y dos de sus vectores directores serán los de las rectas r y s. Por lo tanto la ecuación de* π *será:*

$$\begin{vmatrix} x-1 & y & z-3 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=0 \rightarrow (x-1)\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}-y\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}+(z-3)\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=0 \rightarrow (x-1)\,(-1)-y\,1+(z-3)\,2=0 \rightarrow$$

$$-x+1-y+2z-6=0 \rightarrow -x-y+2z-5=0 \rightarrow x+y-2z+5=0$$

Es decir, $\pi: x+y-2z+5=0$