

PROBLEMA B.3. Se desea construir un campo rectangular con vértices A , B , C y D de manera que: Los vértices A y B sean puntos del arco de la parábola $y = 4 - x^2$, $-2 \leq x \leq 2$, y el segmento de extremos A y B es horizontal.

Los vértices C y D sean puntos del arco de la parábola $y = x^2 - 16$, $-4 \leq x \leq 4$, y el segmento de extremos C y D es horizontal.

Los puntos A y C deben tener la misma abscisa, cuyo valor es el número real positivo x .

Los puntos B y D deben tener la misma abscisa, cuyo valor es el número real negativo $-x$.

Se pide obtener **razonadamente**:

- La expresión $S(x)$ del área del campo rectangular en función del número real positivo x . (4 puntos)
- El número real positivo x para el que el área $S(x)$ es máxima. (4 puntos)
- El valor del área máxima. (2 puntos)

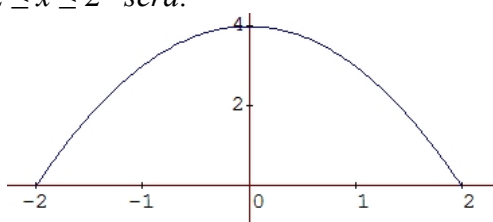
Solución:

El arco de parábola $y = 4 - x^2$, $-2 \leq x \leq 2$ será:

$$x = 0 \rightarrow y = 4$$

$$y = 0 \rightarrow 4 - x^2 = 0$$

$$x^2 = 4 \rightarrow x = \pm 2$$

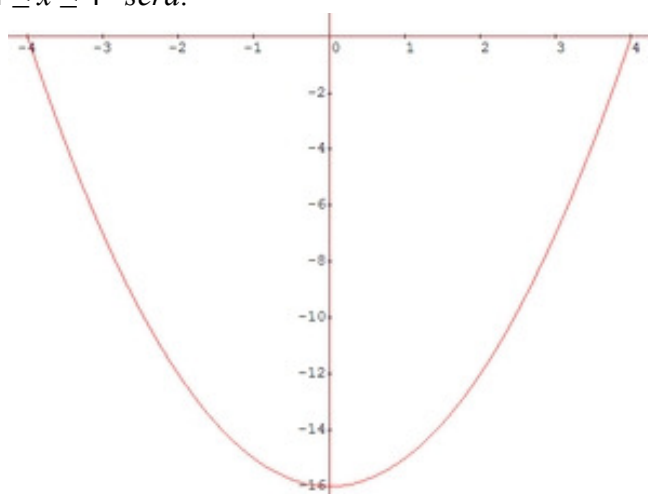


El arco de parábola $y = x^2 - 16$, $-4 \leq x \leq 4$ será:

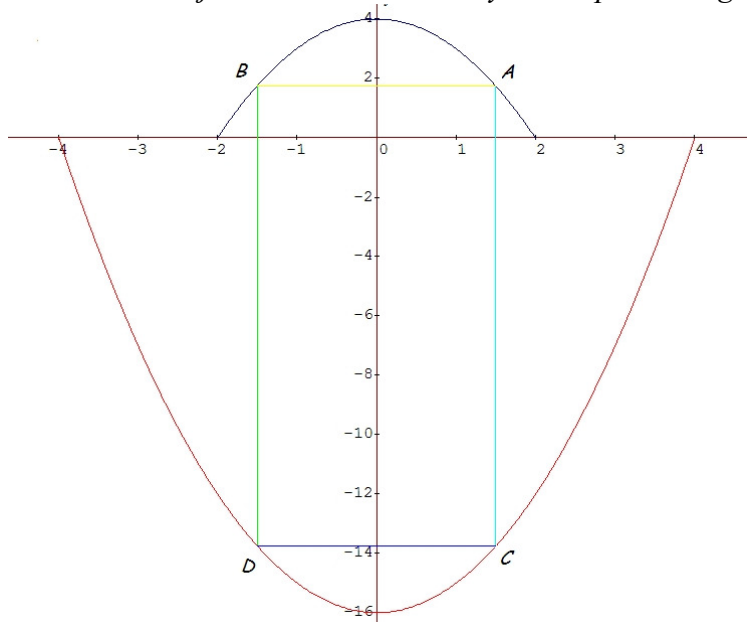
$$x = 0 \rightarrow y = -16$$

$$y = 0 \rightarrow x^2 - 16 = 0$$

$$x^2 = 16 \rightarrow x = \pm 4$$



La representación conjunta de los dos arcos y el campo rectangular será:



Las coordenadas de los puntos son:

$$A(x, 4 - x^2), B(-x, 4 - x^2)$$

$$C(x, x^2 - 16), D(-x, x^2 - 16)$$

Por construcción $x \in (0, 2]$

a) El área del campo rectangular será:

La base del rectángulo mide $2x$

La altura del rectángulo mide $4 - x^2 - (x^2 - 16) = 4 - x^2 - x^2 + 16 = 20 - 2x^2$

Por lo que $S(x) = 2x(20 - 2x^2) = 40x - 4x^3$, $x \in (0, 2]$

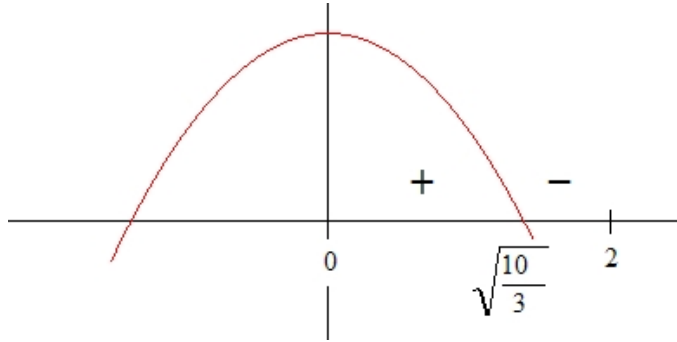
b) Para encontrar el máximo de $S(x)$ estudiemos el signo de $S'(x)$.

$$S'(x) = 40 - 12x^2, \quad x \in (0, 2]$$

$$40 - 12x^2 = 0; \quad 12x^2 = 40; \quad x^2 = \frac{40}{12}; \quad x = \pm \sqrt{\frac{40}{12}} = \pm \sqrt{\frac{10}{3}}. \quad \text{Como } x \in (0, 2] \rightarrow x = \sqrt{\frac{10}{3}} = 1.825 \in (0, 2]$$

Calculemos el máximo de forma gráfica.

$S'(x)$ es un polinomio de 2º grado con coeficiente de x^2 negativo y raíces $\pm \sqrt{\frac{10}{3}}$



Por lo tanto en $x = \sqrt{\frac{10}{3}}$ hay un máximo absoluto ya que a la izquierda $S'(x)$ es creciente y a la derecha

decreciente. Es decir, $S(x)$ es máxima para $x = \sqrt{\frac{10}{3}}$.

c) Cálculo del valor del área máxima.

$$S\left(\sqrt{\frac{10}{3}}\right) = 40\sqrt{\frac{10}{3}} - 4\left(\sqrt{\frac{10}{3}}\right)^3 = 40\sqrt{\frac{10}{3}} - 4\frac{10}{3}\left(\sqrt{\frac{10}{3}}\right) = \left(40 - \frac{40}{3}\right)\sqrt{\frac{10}{3}} = \frac{80}{3}\sqrt{\frac{10}{3}} \cong 48'6864 u^2$$

El valor del área máxima es de aproximadamente $48'6864 u^2$.