PROBLEMA A.1. Se da el sistema de ecuaciones S: $\begin{cases} 2x + \qquad \alpha^2 z = 5 \\ x + (1-\alpha)\, y + z = 1 \\ x + 2y \quad + \alpha^2 z = 1 \end{cases}$, donde α es un parámetro real.

Obtener **razonadamente**:

a) La solución del sistema S cuando α = 0. *(3 puntos)*
b) Todas las soluciones del sistema S cuando α = – 1. *(4 puntos)*
c) El valor de α para el que el sistema S es incompatible. *(3 puntos)*

Solución:

Los apartados a) y b) podemos resolverlos directamente sustituyendo en el sistema S el valor de α por su valor, pero para resolver el apartado c) hay que estudiar el sistema. Empezamos estudiando el sistema.

La matriz de coeficientes es $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & \alpha^2 \\ 1 & 1-\alpha & 1 \\ 1 & 2 & \alpha^2 \end{pmatrix}$ *y la matriz ampliada* $A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & \alpha^2 & 5 \\ 1 & 1-\alpha & 1 & 1 \\ 1 & 2 & \alpha^2 & 1 \end{array}\right)$.

Como A es 3x3, su máximo rango es 3. Como A´ es 3x4, su máximo rango también es 3. Por lo que empezamos estudiando la matriz A.

Estudiemos el determinante de orden 3 de A,

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & \alpha^2 \\ 1 & 1-\alpha & 1 \\ 1 & 2 & \alpha^2 \end{vmatrix}_{F_3 - F_1} = \begin{vmatrix} 2 & 0 & \alpha^2 \\ 1 & 1-\alpha & 1 \\ -1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 2\alpha^2 + (1-\alpha)\alpha^2 - 4 = 2\alpha^2 + \alpha^2 - \alpha^3 - 4 = -\alpha^3 + 3\alpha^2 - 4$$

Resolvamos la ecuación: $-\alpha^3 + 3\alpha^2 - 4 = 0$, *por Ruffini:*

$$\begin{array}{r|rrrr} & -1 & 3 & 0 & -4 \\ -1 & & 1 & -4 & 4 \\ \hline & -1 & 4 & -4 & 0 \\ 2 & & -2 & 4 & \\ \hline & -1 & 2 & 0 & \\ 2 & & -2 & & \\ \hline & -1 & 0 & & \end{array}$$

Llas soluciones de la ecuación son:
α = – 1 y α = 2

Es decir, que $|A| = 0$ *para α = – 1 y α = 2*

Por lo tanto, sobre el sistema S podemos afirmar:

Para α ≠ – 1, 2
rang(A) = rang(A´) = 3 = nº de incognitas, S es sistema compatible y determinado.

Para α = – 1

La matriz ampliada es $A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \end{array}\right)$, *ya sabemos que* $|A| = 0$. *Obtengamos los rangos de A y A´*

Calculemos el rango de A, como $\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 4 \neq 0 \rightarrow rang(A) = 2$

Calculemos el rango de A´, al menor no nulo anterior le orlamos la cuarta columna y la tercera fila de A´,

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = (\text{ como } F_2 = F_3\ ) = 0, \text{ por lo tanto } rang(A') = 2$$

Luego, rang(A) = rang(A´) = 2 < nº de incógnitas, S es sistema compatible indeterminado.
Para resolver el sistema utilizamos las ecuaciones e incógnitas que nos indica el menor no nulo de orden 2 anterior, es decir: $\begin{cases} 2x = 5 - z \\ x + 2y = 1 - z \end{cases}$

De la primera ecuación $x = \dfrac{5-z}{2}$

Sustituyendo este valor de x en la segunda ecuación:

$$\frac{5-z}{2} + 2y = 1 - z; \qquad 5 - z + 4y = 2 - 2z; \qquad 4y = -3 - z; \qquad y = \frac{-3-z}{4}$$

Luego la solución del sistema S será: $\begin{cases} x = \dfrac{5-\lambda}{2} \\ y = \dfrac{-3-\lambda}{4} \\ z = \lambda \end{cases} \quad \lambda \in \Re$

Para α = 2

La matriz ampliada es $A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 4 & 5 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 1 \end{array}\right)$*, ya sabemos que* $|A| = 0$*. Obtengamos los rangos de A y A´*

Calculemos el rango de A, como $\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0 \quad \rightarrow \quad rang(A) = 2$

Calculemos el rango de A´, procediendo como en el apartado anterior,

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -2 + 10 + 5 - 4 = 9 \neq 0 \quad \rightarrow \quad rang(A') = 3$$

Como rang(A) ≠ rang(A´), el sistema S es incompatible.

Respondamos a cada uno de los apartados del problema.

a) Para α = 0, (≠ – 1 y 2) el sistema S es compatible determinado.

La matriz ampliada es, $A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 0 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right)$ *y* $|A| = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = -4$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix}}{-4} = \frac{-10}{-4} = \frac{5}{2} \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 5 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}}{-4} = \frac{5-2}{-4} = \frac{3}{-4} = \frac{-3}{4}$$

Resolviendo por Cramer,

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}}{-4} = \frac{2+10-5-4}{-4} = \frac{3}{-4} = \frac{-3}{4}$$

Finalmente, para α = 0 la solución del sistema S es: $x = \dfrac{5}{2}, \quad y = \dfrac{-3}{4}, \quad z = \dfrac{-3}{4}$

b) Para $\alpha = -1$*, como hemos obtenido anteriormente, la solución del sistema* S *es:* $\begin{cases} x = \dfrac{5-\lambda}{2} \\ y = \dfrac{-3-\lambda}{4} \\ z = \lambda \end{cases} \quad \lambda \in \Re$

c) El sistema S es incompatible, como hemos obtenido anteriormente, para $\alpha = 2$.