PROBLEMA A.2. Se dan las rectas $r_1:\begin{cases}x=1+2\alpha\\ y=\alpha\\ z=2-\alpha\end{cases}$ y $r_2:\begin{cases}x=-1\\ y=1+\beta\\ z=-1-2\beta\end{cases}$, siendo α y β parámetros reales.

Calcular **razonadamente**:

a) Las coordenadas del punto de corte de r_1 y r_2. *(3 puntos)*
b) La ecuación del plano que contiene esas dos rectas. *(4 puntos)*
c) La distancia del punto (0, 0, 1) a la recta r_2. *(3 puntos)*

Solución:

a) Punto de corte entre las rectas r_1 y r_2:

Hay que resolver el sistema: $\begin{cases}1+2\alpha=-1\\ \alpha=1+\beta\\ 2-\alpha=-1-2\beta\end{cases} \rightarrow \begin{cases}2\alpha=-2\\ \alpha-\beta=1\\ -\alpha+2\beta=-3\end{cases}$

De la primera ecuación: $\alpha=\dfrac{-2}{2}=-1$ *, sustituyendo en las otras dos ecuaciones:*

$$\begin{cases}-1-\beta=1 \rightarrow -1-1=\beta \rightarrow \beta=-2\\ 1+2\beta=-3 \rightarrow 2\beta=-3-1 \rightarrow 2\beta=-4 \rightarrow \beta=-2\end{cases}$$

Como hemos obtenido el mismo valor de β, el sistema tiene como solución: α = – 1 y β = – 2

Sustituyendo el valor de α en la recta r_1 o el valor de β en la recta r_2 obtendremos el punto de corte entre las dos rectas.

Para α = – 1, $\begin{cases}x=1+2(-1)=-1\\ y=-1\\ z=2-(-1)=3\end{cases}$. ***El punto de corte entre r_1 y r_2 es P (– 1 , – 1 , 3)***

b) El plano que contiene a las dos rectas tiene como punto el obtenido anteriormente, P, y como vectores directores los de las rectas. Es decir,

Elementos del plano pedido: $\begin{cases}\text{Punto } P(-1,-1,3)\\ \vec{v}_{r_1}=(2,1,-1)\\ \vec{v}_{r_2}=(0,1,-2)\end{cases}$ *, la ecuación general del plano la obtenemos mediante el siguiente cálculo:*

$$\begin{vmatrix}x+1 & y+1 & z-3\\ 2 & 1 & -1\\ 0 & 1 & -2\end{vmatrix}=0$$

$$(x+1)\begin{vmatrix}1 & -1\\ 1 & -2\end{vmatrix}-(y+1)\begin{vmatrix}2 & -1\\ 0 & -2\end{vmatrix}+(z-3)\begin{vmatrix}2 & 1\\ 0 & 1\end{vmatrix}=0$$

$$(x+1)(-2+1)-(y+1)(-4)+(z-3)\,2=0$$

$$(x+1)(-1)+4(y+1)+2(z-3)=0$$

$$-x-1+4y+4+2z-6=0$$

$$-x+4y+2z-3=0$$

Por lo tanto, la ecuación general del plano pedido es: $\boldsymbol{-x+4y+2z-3=0}$

c) Llamando Q (0,0,1), debemos calcular d (Q , r_2)

Siendo P el punto de la recta r_2 obtenido en el apartado a) y $\vec{v}$ el vector director de la recta r_2 la distancia pedida podemos calcularla mediante la siguiente fórmula: $d(Q,r_2)=\dfrac{\left|\overrightarrow{PQ}\times\vec{v}\right|}{\left|\vec{v}\right|}$*, efectuemos los cálculos necesarios.*

$$\overrightarrow{PQ}=(0,0,1)-(-1,-1,3)=(1,1,-2)$$

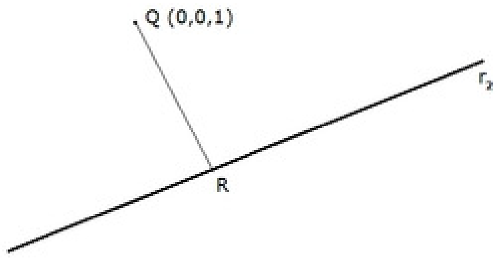
$$\overrightarrow{PQ}\times\vec{v}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & 1 & -2\\ 0 & 1 & -2\end{vmatrix}=\vec{i}\begin{vmatrix}1 & -2\\ 1 & -2\end{vmatrix}-\vec{j}\begin{vmatrix}1 & -2\\ 0 & -2\end{vmatrix}+\vec{k}\begin{vmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{vmatrix}=2\vec{j}+\vec{k}=(0,2,1)$$

$$\left|\overrightarrow{PQ}\times\vec{v}\right|=\left|(0,2,1)\right|=\sqrt{0^2+2^2+1^2}=\sqrt{5}$$

$$\left|\vec{v}\right|=\left|(0,1,-2)\right|=\sqrt{0^2+1^2+(-2)^2}=\sqrt{5}$$

Finalmente, $d(Q,r_2)=\dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}}=1$

Otra forma de obtener esta distancia, si no nos acordásemos de la fórmula, sería obtener un punto R de la recta r_2 de forma que el vector $\overrightarrow{QR}$ sea perpendicular a r_2, así d(Q,r_2) = d(Q,R).



El punto R de la recta r_2 será $(-1,\ 1+\beta,\ -1-2\beta)$

$\overrightarrow{QR}=(-1,\ 1+\beta,\ -1-2\beta)-(0,\ 0,\ 1)=(-1,\ 1+\beta,\ -2-2\beta)$

$\overrightarrow{QR}\perp r_2 \ \rightarrow\ \overrightarrow{QR}\perp\overrightarrow{v_{r_2}}$*, por lo que debe cumplirse:*

$(-1,\ 1+\beta,\ -2-2\beta)\cdot(0,\ 1,\ -2)=0$

$1+\beta+4+4\beta=0$

$5+5\beta=0;\quad \beta=-1$

Por lo tanto $R(-1,\ 0,\ 1)$

y $d(Q,R)=\sqrt{(-1)^2+0^2+0^2}=1$

Luego $d(Q,r_2)=1$