PROBLEMA B.1. Obtener **razonadamente**:

a) Todas las soluciones $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ de la ecuación $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ *(4 puntos).*

b) El determinante de una matriz cuadrada B de dos filas, que tiene matriz inversa y que verifica la ecuación $B^2 = B$. *(3 puntos).*

c) El determinante de una matriz cuadrada A que tiene cuatro filas y que verifica la ecuación:

$$A^2 - 9\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

sabiendo además que el determinante de A es positivo. *(3 puntos).*

Solución:

a) Veamos si la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ *tiene inversa.*

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 2 - 2 + 3 = 0, \text{ luego } \nexists\, A^{-1}$$

La ecuación matricial del enunciado da lugar al siguiente sistema:

$\begin{cases} x \quad + 2z = 1 \\ x + y + 3z = 3 \\ x - y - z = -1 \end{cases}$, *estudiemos este sistema. Su matriz ampliada es* $A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 3 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{array}\right)$

Estudiemos el rango de A.

Del cálculo inicial sabemos que $|A| = 0$ *y como* $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$, *rang(A) = 2*

Estudiemos el rango de A´, como ran(A) = 2 $\rightarrow$ *ran(A´)* ≥ 2. *Ampliamos el menor de orden 2 no nulo de A´, que es el obtenido anteriormente en A, con la cuarta columna y tercera fila:*

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = -1 - 1 - 1 + 3 = 0 \qquad \text{Por lo tanto } ran(A´) = 2$$

Lo obtenido es: ran(A) = ran(A´) = 2 < 3 = nº incógnitas $\rightarrow$ *Sistema compatible indeterminado.*
Resolvemos el sistema usando las ecuaciones (1ª y 2ª) e incógnitas (x, y) que han proporcionado este rango.

El sistema a resolver es: $\begin{cases} x \quad + 2z = 1 \\ x + y + 3z = 3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 1 - 2z \\ x + y = 3 - 3z \end{cases}$

Sustituyendo el valor de x obtenido en la 1ª ecuación en la 2ª:
$1 - 2z + y = 3 - 3z;\quad y = 3 - 1 - 3z + 2z = 2 - z$

Las soluciones del sistema son: $\begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = 2 - \lambda \\ z = \lambda \end{cases} \quad \lambda \in \Re$

Finalmente, las soluciones de la ecuación matricial inicial serán: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - 2\lambda \\ 2 - \lambda \\ \lambda \end{pmatrix} \quad \lambda \in \Re$

b) B es una matriz 2x2 / $\exists\, B^{-1}$ *y* $B^2 = B$. *Debemos obtener* $|B|$ *(determinante de B).*

Como $B^2 = B$

$|B^2| = |B|$, *por la propiedad de los determinantes:* $|A\,.\,B| = |A|\,.\,|B|$, $|B^2| = |B|\,|B| = |B|^2$

$$|B|^2 = |B|;\quad |B|^2 - |B| = 0;\quad |B|\big(|B| - 1\big) = 0 \quad \rightarrow \left\langle \begin{array}{l} |B| = 0 \\ |B| - 1 = 0 \quad \rightarrow \quad |B| = 1 \end{array} \right.$$

Ahora bien, como $\exists\, B^{-1} \quad \rightarrow \quad |B| \neq 0$

Por lo que concluimos que $|B| = 1$

c) A es una matriz 4x4 / $|A| > 0$ *y* $A^2 - 9\,I = \mathbf{0}$ *(siendo I la matriz identidad y* $\mathbf{0}$ *la matriz nula ambas de orden 4).*

Debemos obtener $|A|$.

De $A^2 - 9\,I = \mathbf{0}$; $A^2 = \mathbf{0} + 9\,I$; $A^2 = 9\,I$

$|A^2| = |9\,I|$, *por la propiedad de los determinantes aplicada en el apartado anterior:*

$|A|^2 = |9\,I|$, *como I es 4x4 entonces* $|9\,I| = 9^4$, *luego*

$$|A|^2 = 9^4 \quad \rightarrow \quad |A| = \pm\sqrt{9^4} = \pm 9^2 = \pm\, 81$$

Pero como sabemos que $|A| > 0$ *concluimos que* $|A| = 81$.