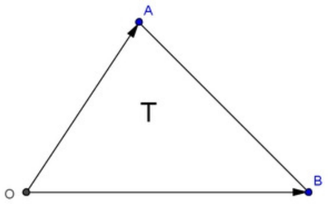
# OPCIÓN A

**PROBLEMA A.2.** Sean $O$ = (0,0,0), $A$ = (1,0,1), $B$ = (2,1,0) y $C$ = (0,2,3). Obtener **razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado**:

a) El área del triángulo de vértices O, A *y* B, *(3 puntos)* y el volumen del tetraedro de vértices *O, A, B y C* *(2 puntos).*
b) La distancia del vértice C al plano que contiene al triángulo *OAB*. *(3 puntos)*
c) La distancia del punto C´ al plano que contiene al triángulo *OAB,* siendo C´ el punto medio del segmento de extremos O y C. *(2 puntos)*

*Solución:*

*a) Área del triángulo OAB*




*El área de este triángulo es,*

$$A_T = \frac{1}{2}\left| \overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OB} \right|$$

$$\overrightarrow{OA} = (1,0,1) \quad y \quad \overrightarrow{OB} = (2,1,0)$$

*Calculemos el producto vectorial,*

$$\overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OB} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \vec{i}\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} - \vec{j}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} + \vec{k}\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k} = (-1,2,1)$$

$$\left| \overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OB} \right| = \left|(-1,2,1)\right| = \sqrt{(-1)^2 + 2^2 + 1^2} = \sqrt{6}$$

*Finalmente,* $A_T = \frac{1}{2}\sqrt{6} = \frac{\sqrt{6}}{2}$ *u.a.* $\approx$ *1,2247 u.a.*

*Volumen del tetraedro OABC*

*Considerando los vectores* $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}$ *y* $\overrightarrow{OC}$, *sabemos que el valor absoluto del producto mixto de estos tres vectores nos da el volumen del paralelepípedo definido por ellos. Como queremos calcular el volumen del tetraedro correspondiente, el cálculo será:*

$$V_{TETRAEDRO} = \frac{1}{3}\frac{1}{2}\left| \left[ \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC} \right] \right|$$

*multiplicamos por* $\frac{1}{3}$ *porque* $V_{TETRAEDRO} = \frac{1}{3} A_{base}\, h$

*multiplicamos por* $\frac{1}{2}$ *porque* $A_{\substack{base \\ Triángulo}} = \frac{1}{2} A_{\text{paralelogramo}}$

*Por lo tanto,*

$$V_{TETRAEDRO} = \frac{1}{6}\left| \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \end{vmatrix} \right| = \frac{1}{6}\left|3+4\right| = \frac{7}{6} \text{ u.v.}$$

*b) Sea* $\pi$ *el plano que contiene al triángulo OAB, hay que calcular* $d(C, \pi)$.

*Obtengamos la ecuación del plano* $\pi$

$$\text{De este plano conocemos: } \begin{cases} \text{punto} \quad (0,0,0) \\ \text{vectores directores} \begin{cases} \vec{u} = \overrightarrow{OA} = (1,0,1) \\ \vec{v} = \overrightarrow{OB} = (2,1,0) \end{cases} \end{cases}$$

*La ecuación del plano* $\pi$ *se obtiene:*

$$\begin{vmatrix} x-0 & y-0 & z-0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \quad \rightarrow \quad x\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} - y\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} + z\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad \rightarrow \quad x\,(-1) - y\,(-2) + z\,.\,1 = 0$$

$$-x + 2y + z = 0$$

*Finalmente,* $d(C\,,\pi) = \dfrac{|-0+2\,.\,2+3|}{\sqrt{(-1)^2+2^2+1^2}} = \dfrac{7}{\sqrt{6}} = \dfrac{7\sqrt{6}}{6}\ u.l.$

*Otra forma de resolverlo.*

*Utilizando el resultado del apartado a)*

$$V_{TETRAEDRO} = \frac{1}{3}A_b\ h \quad \begin{cases} A_b = \dfrac{\sqrt{6}}{2} & \text{obtenido en a)} \\ h = d(C\,,\pi) \end{cases}$$

*Por lo tanto:* $\dfrac{7}{6} = \dfrac{1}{3}\dfrac{\sqrt{6}}{2}\,h \quad \rightarrow \quad \dfrac{7}{6} = \dfrac{\sqrt{6}}{6}\,h \quad \rightarrow \quad 7 = \sqrt{6}\ h \quad \rightarrow \quad h = \dfrac{7}{\sqrt{6}} \quad \rightarrow \quad d(C\,,\pi) = \dfrac{7}{\sqrt{6}}\ u.l.$

*c) Hay que calcular d ( C´, π )*

*C´ es el punto medio del segmento OC, por lo que* $C' = \left(\dfrac{0+0}{2}, \dfrac{0+2}{2}, \dfrac{0+3}{2}\right) = \left(0,\,1,\,\dfrac{3}{2}\right)$

*Como el plano π ya lo calculamos en el apartado anterior,*

$$d(C'\,,\pi) = \frac{\left|-0+2\,.\,1+\dfrac{3}{2}\right|}{\sqrt{(-1)^2+2^2+1^2}} = \frac{\dfrac{7}{2}}{\sqrt{6}} = \frac{7}{2\sqrt{6}} = \frac{7\sqrt{6}}{12}\ u.l.$$