

OPCIÓN A

PROBLEMA A.3. Se estudió el movimiento de un meteorito del sistema solar durante un mes. Se obtuvo que la ecuación de su trayectoria T es $y^2 = 2x + 9$, siendo $-4,5 \leq x \leq 8$ e $y \geq 0$, estando situado el Sol en el punto $(0,0)$. Obtener **razonadamente**, **escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado**:

- La distancia del meteorito al Sol desde un punto P de su trayectoria cuya abcisa es x . (3 puntos)
- El punto P de la trayectoria T donde el meteorito alcanza la distancia mínima al Sol. (5 puntos)
- Distancia mínima del meteorito al Sol. (2 puntos)

Nota. En los tres resultados sólo se dará la expresión algebraica o el valor numérico obtenido, sin mencionar la unidad de medida por no haber sido indicada en el enunciado.

Solución:

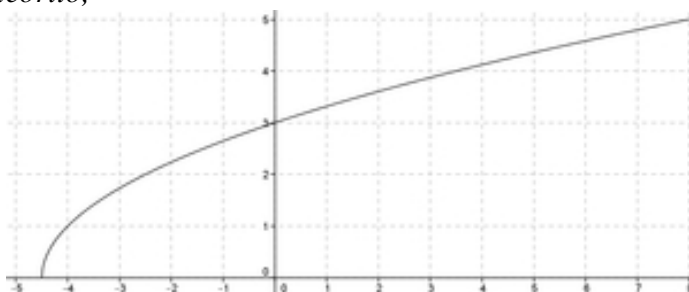
Representemos gráficamente la trayectoria del meteorito,

$$x = -4,5 \rightarrow y^2 = 0 \rightarrow y = 0$$

$$x = 0 \rightarrow y^2 = 9 \rightarrow y = 3$$

$$x = 8 \rightarrow y^2 = 25 \rightarrow y = 5$$

$$(y^2 = 9 \rightarrow y = \pm 3, \text{ pero como } y \geq 0, y = 3)$$



a) Un punto cualquiera de la trayectoria del meteorito cuya abcisa sea x , será $P(x, \sqrt{2x+9})$.

$$d(P, \text{Sol}) = d((x, \sqrt{2x+9}), (0,0)) = \sqrt{(x-0)^2 + (\sqrt{2x+9}-0)^2} = \sqrt{x^2 + 2x + 9}$$

$$\text{Luego } d(P, \text{Sol}) = \sqrt{x^2 + 2x + 9}, \quad -4,5 \leq x \leq 8$$

b) Buscamos un punto P de la trayectoria / $d(P, \text{Sol})$ sea mínima.

En el apartado anterior hemos obtenido la expresión de la distancia de un punto de la trayectoria al Sol,

luego buscamos el mínimo de la función $y = \sqrt{x^2 + 2x + 9}$, $-4,5 \leq x \leq 8$

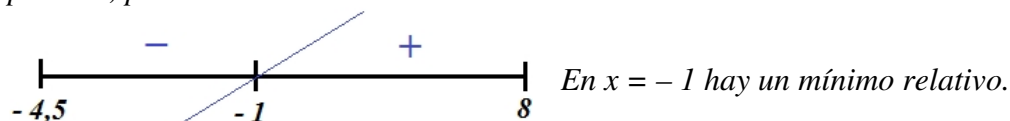
$$y' = \frac{2x+2}{2\sqrt{x^2+2x+9}} = \frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x+9}}$$

Estudiamos el signo de y'

$$x+1=0 \rightarrow x=-1$$

$\sqrt{x^2+2x+9}$, como $x^2+2x+9 = (x+1)^2 + 8$, para cualquier valor de x es positivo.

El signo de y' depende del numerador que es un polinomio de 1^{er} grado, raíz -1 y coeficiente de x positivo, por lo tanto:



Como a la izquierda de -1 la función es decreciente y a la derecha creciente, este es el mínimo absoluto.

$$\text{Para } x = -1 \rightarrow y^2 = 2 \cdot (-1) + 9 = 7 \rightarrow y = \sqrt{7}$$

El punto pedido es $(-1, \sqrt{7})$

c) *La distancia mínima del meteorito al Sol la obtenemos sustituyendo en la expresión de la distancia obtenida en el apartado a) el valor de x por -1*

$$x = -1 \rightarrow \sqrt{(-1)^2 + 2(-1) + 9} = \sqrt{1 - 2 + 9} = \sqrt{8}$$

La distancia mínima del meteorito al Sol es $\sqrt{8}$.