Matemáticas II Junio 2013

OPCIÓN B

PROBLEMA B.1. Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix}-2 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 0\\ 4 & 2 & -2\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}2 & 1 & 2\\ 0 & -1 & 5\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}$, obtener **razonadamente** el valor de los determinantes siguientes, **escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado**:

$a)$ $|A+B|$ y $\left|\frac{1}{2}(A+B)^{-1}\right|$. $(4\ puntos)$

$b)$ $\left|(A+B)^{-1}A\right|$ y $\left|A^{-1}(A+B)\right|$. $(3\ puntos)$

$c)$ $\left|2ABA^{-1}\right|$ y $\left|A^{3}B^{-1}\right|$. $(3\ puntos)$

Solución:

a)

$$A+B=\begin{pmatrix}-2 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 0\\ 4 & 2 & -2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2 & 1 & 2\\ 0 & -1 & 5\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 1 & 2\\ 1 & 0 & 5\\ 4 & 2 & 0\end{pmatrix}$$

$$|A+B|=\begin{vmatrix}0 & 1 & 2\\ 1 & 0 & 5\\ 4 & 2 & 0\end{vmatrix}=4+20=24$$

Por las propiedades de los determinantes sabemos que $\left|A^{-1}\right|=\frac{1}{|A|}$ *y que si* A *es* $n\,x\,n$ $|\alpha A|=\alpha^{n}|A|$,

$$\left|\frac{1}{2}(A+B)^{-1}\right|=\left(como\ (A+B)^{-1}\ es\ 3x3\right)=\left(\frac{1}{2}\right)^{3}\left|(A+B)^{-1}\right|=\frac{1}{8}\frac{1}{|A+B|}=\frac{1}{8}\frac{1}{24}=\frac{1}{192}$$

Solución: $|A+B|=24$ y $\left|\frac{1}{2}(A+B)^{-1}\right|=\frac{1}{192}$

b) Ahora utilizamos la propiedad que dice que $|A\ B|=|A|\,|B|$

$$\left|(A+B)^{-1}A\right|=\left|(A+B)^{-1}\right||A|=\frac{1}{|A+B|}|A|=\frac{1}{24}4=\frac{1}{6}$$

Del apartado anterior sabemos que $|A+B|=24$. *Calculemos* $|A|=\begin{vmatrix}-2 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 0\\ 4 & 2 & -2\end{vmatrix}=4$

$$\left|A^{-1}(A+B)\right|=\left|A^{-1}\right||A+B|=\frac{1}{|A|}|A+B|=\frac{1}{4}24=6$$

Solución: $\left|(A+B)^{-1}A\right|=\frac{1}{6}$ y $\left|A^{-1}(A+B)\right|=6$

c) Calculemos $|B| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -4$

$$\left|2\ A\ B\ A^{-1}\right| = (como\ \left(A\ B\ A^{-1}\right) es\ 3x3) = 2^3\ |A|\,|B|\,\left|A^{-1}\right| = 8\ |A|\,|B|\ \frac{1}{|A|} = 8\ |B| = 8\ (-4) = -32$$

$$\left|A^3\ B^{-1}\right| = \left|A^3\right|\left|B^{-1}\right| = |A|^3\ \frac{1}{|B|} = 4^3\ \frac{1}{-4} = -16$$

Solución: $\left|2\ A\ B\ A^{-1}\right| = -32$ *y* $\left|A^3\ B^{-1}\right| = -16$