OPCIÓN B

PROBLEMA B.2. Dados los puntos $A = (1, 0, 1)$, $B = (2, -1, 0)$, $C = (0, 1, 1)$ y $P = (0, -3, 2)$ se pide calcular **razonadamente**, **escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado**:

a) La distancia del punto P al A. *(2 puntos)*
b) La distancia del punto P a la recta que pasa por los puntos A y B. *(4 puntos)*
c) La distancia del punto P al plano que pasa por los puntos A, B y C. *(4 puntos)*

Solución:

a) $d(P\,,A)=\sqrt{(0-1)^2+(-3-0)^2+(2-1)^2}=\sqrt{1+9+1}=\sqrt{11}$

Respuesta: $d(P\,,A)=\sqrt{11}$

b) Hay que calcular $d(P\,,r)$*, siendo* r *la recta que pasa por* A *y* B.

Obtengamos la ecuación de la recta $r\begin{cases} punto \quad A(1,0,1) \\ \overrightarrow{v_r}=\overrightarrow{AB}=(2,-1,0)-(1,0,1)=(1,-1,-1)\end{cases} \rightarrow \quad r:\begin{cases} x=1+\lambda \\ y=-\lambda \\ z=1-\lambda \end{cases} \quad \lambda\in\Re$

Para calcular $d(P, r)$ *procedemos de la siguiente forma,*

Obtenemos el plano que pasa por el punto P *y es perpendicular a* r*, plano* π

Obtenemos el punto de corte entre el plano π *y la recta* r*, punto* Q

Y finalmente, $d(P\,,r) = d(P\,,Q)$

Plano π

Como $\pi\perp r \ \rightarrow\ \overrightarrow{v_r}\perp\pi \ \rightarrow\ \pi: x-y-z+D=0$

Como $P\in\pi \ \rightarrow\ 0-(-3)-2+D=0 \ \rightarrow\ 3-2+D=0 \ \rightarrow\ D=-1$

La ecuación del plano π *es* $x-y-z-1=0$

Punto Q

$$1+\lambda-(-\lambda)-(1-\lambda)-1=0$$
$$1+\lambda+\lambda-1+\lambda-1=0$$
$$3\lambda-1=0$$
$$3\lambda=1$$
$$\lambda=\frac{1}{3}\ \rightarrow Q=\left(1+\frac{1}{3},\frac{-1}{3},1-\frac{1}{3}\right)=\left(\frac{4}{3},\frac{-1}{3},\frac{2}{3}\right)$$

$$d(P\,,r) = d(P\,,Q) = \sqrt{\left(0-\frac{4}{3}\right)^2+\left(-3-\frac{-1}{3}\right)^2+\left(2-\frac{2}{3}\right)^2}=\sqrt{\left(-\frac{4}{3}\right)^2+\left(\frac{-8}{3}\right)^2+\left(\frac{4}{3}\right)^2}=$$
$$=\sqrt{\frac{16}{9}+\frac{64}{9}+\frac{16}{9}}=\sqrt{\frac{96}{9}}=\frac{4\sqrt{6}}{3}$$

Respuesta: $d(P\,,r)=\dfrac{4\sqrt{6}}{3}$

Otra forma de obtener esta distancia es mediante la fórmula: $d(P,r)=\dfrac{\left|\overrightarrow{AP}\times\overrightarrow{v_r}\right|}{\left|\overrightarrow{v_r}\right|} \quad , \quad A\in r$

c) Obtengamos la ecuación del plano que pasa por los puntos A, B y C.

$$\pi : \begin{cases} \textit{punto } A \\ \textit{vectores directores} \begin{cases} \overrightarrow{AB} = (1,-1,-1) \\ \overrightarrow{AC} = (-1,1,0) \end{cases} \end{cases}$$

La ecuación del plano π *será,*

$$\begin{vmatrix} x-1 & y & z-1 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow (x-1)\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} - y\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} + (z-1)\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$(x-1)\,.\,1 - y\,(-1) + (z-1)\,.\,0 = 0$$

$$x - 1 + y = 0 \rightarrow x + y - 1 = 0$$

Por lo que, $d(P\,,\pi) = \dfrac{|0-3-1|}{\sqrt{1^2+1^2+0^2}} = \dfrac{4}{\sqrt{2}} = \dfrac{4\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2}$

Respuesta: $d(P\,,\pi) = 2\sqrt{2}$