Matemáticas II   Junio 2014

OPCIÓN A

PROBLEMA A.1. Dado el sistema de ecuaciones $\begin{cases} x+3y+2z=-1 \\ 2x+4y+5z=k-2 \\ x+k^2y+3z=2k \end{cases}$, donde k es un parámetro real.

a) Discutir **razonadamente** el sistema según los valores de k. *(4 puntos)*

b) Obtener **razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado**, todas las soluciones del sistema cuando $k=-1$. *(3 puntos)*

c) Resolver **razonadamente** el sistema cuando $k=0$. *(3 puntos)*

Solución:

Estudiemos el sistema $\begin{cases} x+3y+2z=-1 \\ 2x+4y+5z=k-2 \\ x+k^2y+3z=2k \end{cases}$ *Su matriz ampliada, A´, es* $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & 5 & k-2 \\ 1 & k^2 & 3 & 2k \end{array}\right)$

La matriz de coeficientes, A, es 3x3 por lo que su máximo rango posible será 3.

A´ es 3x4 por lo que su máximo rango posible será 3.

Empezamos estudiando el rango de A,

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 5 \\ 1 & k^2 & 3 \end{vmatrix} = 12+4k^2+15-8-5k^2-18=-k^2+1$$

$$-k^2+1=0 \;\rightarrow\; k^2=1 \;\rightarrow\; k=\pm\sqrt{1}=\pm 1$$

Procedamos a responder a los tres apartados.

a) De los cálculos realizados anteriormente deducimos,

Para k ≠ – 1 , 1 *→ /A/ ≠ 0 → ran (A) = 3 y como el máximo rango de A´ también es 3,*
ran (A) = 3 = ran(A´) = nº de incógnitas → ***Sistema compatible determinado***

Para k = – 1,

$$A´=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & 5 & -3 \\ 1 & 1 & 3 & -2 \end{array}\right) \quad y \;\; sabemos\; que \;\; |A|=0 \;\rightarrow\; ran\,(A)\le 2$$

Calculemos el rango de A,

$$\left.\begin{array}{l} |1|=1\neq 0 \\ \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}=4-6=-2\neq 0 \end{array}\right\} \rightarrow \; ran\,(A)=2$$

Calculemos el rango de A´,

Sólo nos falta por estudiar el menor de orden 3 que se obtiene al orlar el menor de orden 2 no nulo anterior con la tercera fila y la cuarta columna de A´,

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 4 & -3 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix}=-8-2-9+4+3+12=-19+19=0 \;\rightarrow\; ran\,(A´)=2$$

Luego, ran (A) = ran (A´) = 2 < nº de incógnitas. ***Para k = – 1 el sistema es compatible indeterminado.***

Para k = 1,

$$A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & 5 & -1 \\ 1 & 1 & 3 & 2 \end{array}\right)$$

Sabemos que /A/ = 0 y considerando el cálculo del rango de A realizado en el caso anterior, ran(A) =2.
Calculemos el rango de A´, (ran (A´) ≥ ran (A) =2)

$$|1| = 1 \neq 0$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 4 - 6 = -2 \neq 0$$

al orlar el menor de orden 2 no nulo anterior con la tercera fila y la cuarta columna de A´

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 4 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 8 - 2 - 3 + 4 + 1 - 12 = 13 - 17 = -4 \neq 0 \quad \rightarrow \quad ran\,(A') = 3$$

Luego, ran (A) = 2 ≠ ran (A´) = 3 , sistema incompatible. ***Para k = 1 el sistema es incompatible.***

Resumiendo, ***Para k ≠ – 1 , 1 el sistema es compatible determinado***
Para k = – 1 el sistema es compatible indeterminado
Para k = 1 el sistema es incompatible

b) Para k = – 1 sabemos que el sistema es compatible indeterminado
Por el estudio realizado anteriormente, el sistema a resolver está formado por la 1ª y 2ª ecuaciones y las incógnitas principales son x e y:

$$\begin{cases} x + 3y = -1 - 2z \\ 2x + 4y = -3 - 5z \end{cases} \rightarrow \textit{Por Cramer} \rightarrow$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -1-2z & 3 \\ -3-5z & 4 \end{vmatrix}}{-2} = \frac{-4 - 8z + 9 + 15z}{-2} = \frac{5 + 7z}{-2} = \frac{-5 - 7z}{2}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -1-2z \\ 2 & -3-5z \end{vmatrix}}{-2} = \frac{-3 - 5z + 2 + 4z}{-2} = \frac{-1 - z}{-2} = \frac{1 + z}{2}$$

Para k = – 1, la solución es:

$$\begin{cases} x = \dfrac{-5 - 7\lambda}{2} \\ y = \dfrac{1 + \lambda}{2} \\ z = \lambda \end{cases} \qquad \lambda \in \Re$$

c) Para $k = 0$, como es distinto de -1 y 1, del estudio del apartado a) sabemos que el sistema es compatible determinado

El sistema a resolver es $\begin{cases} x+3y+2z=-1 \\ 2x+4y+5z=-2 \\ x \qquad +3z=0 \end{cases}$

De este sistema sabemos que $|A| = -k^2+1\Big|_{k=0} = 1$. *Resolviendo por Cramer,*

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix}}{1} = -12+18 = 6$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 5 \\ 1 & 0 & 3 \end{vmatrix}}{1} = -6-5+4+6 = -1$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}}{1} = -6+4 = -2$$

Finalmente, para $k = 0$ la solución del sistema es $x = 6$, $y = -1$, $z = -2$.