PROBLEMA A.2. Se dan el punto $A = (-1, 0, 2)$ y las rectas $r: \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y}{3} = z-2$ y $s: \begin{cases} x = -1-2\lambda \\ y = 1+3\lambda \\ z = 1+\lambda \end{cases}$

Obtener **razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado**:

a) La ecuación del plano π que pasa por el punto A y contiene a la recta r. *(3 puntos)*
b) La ecuación del plano σ que pasa por el punto A y es perpendicular a la recta s. *(3 puntos)*
c) Un vector dirección de la recta l intersección de los planos π y σ *(2 puntos)* y la distancia entre las rectas s y l. *(2 puntos)*

Solución:

a) Hay que obtener el plano $\pi \, / \, A \in \pi$ y $r \subset \pi$.

Para obtener la ecuación del plano π *necesitamos un punto y dos vectores directores del plano.*

De la recta r *conocemos:* $\begin{cases} \text{punto} \quad P_r = (1,0,2) \\ \text{vector} \quad \vec{v}_r = (2,3,1) \end{cases}$

Ahora obtenemos el vector $\overrightarrow{AP_r} = (2,0,0)$. *Como* $\overrightarrow{AP_r}$ *no es paralelo a* $\vec{v}_r$, $\left(\dfrac{2}{2} \neq \dfrac{0}{3} \neq \dfrac{0}{1}\right)$, $\overrightarrow{AP_r}$ *es otro vector director del plano* π.

Elementos del plano pedido: $\begin{cases} \text{Punto} \quad A(-1,0,2) \\ \text{vectores directores} \begin{cases} \vec{v}_r = (2,3,1) \\ \overrightarrow{AP_r} = (2,0,0) \end{cases} \end{cases}$ *, la ecuación general del plano* π *la obtenemos mediante el siguiente cálculo:*

$$\begin{vmatrix} x-(-1) & y-0 & z-2 \\ 2 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow \begin{vmatrix} x+1 & y & z-2 \\ 2 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

Desarrollando el determinante por la tercera fila:

$$2\begin{vmatrix} y & z-2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow 2\big(y-3(z-2)\big) = 0 \rightarrow \big(y-3(z-2)\big) = 0 \rightarrow y-3z+6=0$$

Por lo tanto, la ecuación general del plano π *es:* $\mathbf{y - 3z + 6 = 0}$

b) Hay que obtener el plano $\sigma \, / \, A \in \sigma$ y $s \perp \sigma$.

Como $s \perp \sigma$, *el vector director del la recta* s *es perpendicular al plano* σ. $\vec{v}_s = (-2,3,1)$, *por lo tanto la ecuación del plano* σ *será:* $-2x + 3y + z + D = 0$

Como $A \in \sigma \rightarrow -2(-1) + 3 \cdot 0 + 2 + D = 0; \; 2 + 2 + D = 0; \; 4 + D = 0; \; D = -4$

Por lo tanto, la ecuación general del plano σ *es:* $\mathbf{-2x + 3y + z - 4 = 0}$

c) *Obtener un vector director de la recta* l.

Como la recta l *es la intersección de los planos* π *y* σ *entonces* $l: \begin{cases} y-3z+6=0 \\ -2x+3y+z-4=0 \end{cases}$ *por lo tanto un vector director de* l *lo obtenemos mediante el siguiente cálculo,*

$$\vec{v_l}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 0 & 1 & -3\\ -2 & 3 & 1\end{vmatrix}=\vec{i}\begin{vmatrix}1 & -3\\ 3 & 1\end{vmatrix}-\vec{j}\begin{vmatrix}0 & -3\\ -2 & 1\end{vmatrix}+\vec{k}\begin{vmatrix}0 & 1\\ -2 & 3\end{vmatrix}=10\,\vec{i}-6\,\vec{j}+2\,\vec{k}=(10,6,2)\cong(5,3,1)$$

Por lo tanto $\vec{v_l}=(5,3,1)$

<u>*Obtener la distancia entre las rectas s y l.*</u>

Veamos si las rectas son paralelas, $\vec{v_l}=(5,3,1)$ *y* $\vec{v_s}=(-2,3,1)$, $\frac{5}{-2}\neq\frac{3}{3}=\frac{1}{1}$, *luego las rectas no son paralelas.*

Podemos calcular d (s , l) mediante la fórmula correspondiente: $d(s,l)=\dfrac{\left|\left[\vec{v_s}\,,\vec{v_l}\,,\overrightarrow{P_sP_l}\right]\right|}{\left|\vec{v_s}\times\vec{v_l}\right|}$

Calculemos cada uno de los términos de la fórmula anterior.

Obtengamos P_l*, punto de la recta* $l:\begin{cases}y-3z+6=0\\ -2x+3y+z-4=0\end{cases}$ *que era la intersección de los planos* π *y* σ *y por definición de estos dos planos el punto A está en los dos, luego* $P_l = A = (-1, 0, 2)$.

$\overrightarrow{P_sP_l}=(-1,0,2)-(-1,1,1)=(0,-1,1)$

$$\left[\vec{v_s}\,,\vec{v_l}\,,\overrightarrow{P_sP_l}\right]=\begin{vmatrix}-2 & 3 & 1\\ 5 & 3 & 1\\ 0 & -1 & 1\end{vmatrix}=-6-5-2-15=-28$$

$$\vec{v_s}\times\vec{v_l}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ -2 & 3 & 1\\ 5 & 3 & 1\end{vmatrix}=\vec{i}\begin{vmatrix}3 & 1\\ 3 & 1\end{vmatrix}-\vec{j}\begin{vmatrix}-2 & 1\\ 5 & 1\end{vmatrix}+\vec{k}\begin{vmatrix}-2 & 3\\ 5 & 3\end{vmatrix}=7\,\vec{j}-21\,\vec{k}=(0,7,-21)$$

$$\left|\vec{v_s}\times\vec{v_l}\right|=\left|(0,7,-21)\right|=\sqrt{0^2+7^2+(-21)^2}=\sqrt{490}=7\sqrt{10}$$

$$Y\quad d(s,l)=\frac{\left|\left[\vec{v_s}\,,\vec{v_l}\,,\overrightarrow{P_sP_l}\right]\right|}{\left|\vec{v_s}\times\vec{v_l}\right|}=\frac{|-28|}{7\sqrt{10}}=\frac{28}{7\sqrt{10}}=\frac{4}{\sqrt{10}}=\frac{4\sqrt{10}}{\sqrt{10}\sqrt{10}}=\frac{4\sqrt{10}}{10}=\frac{2\sqrt{10}}{5}\approx 1'2649\ u.l.$$

Otra forma de obtener esta distancia, si no nos acordásemos de la fórmula anterior, sería obtener un plano τ *que contiene a la recta s y es paralelo a la recta l. De esta forma* $d(s,l)=d(P_l,\tau)$

Calculemos la ecuación del plano τ: $s\subset\tau$ *y* $l\,//\,\tau$ $\rightarrow$ $\overrightarrow{n_\tau}=\vec{v_s}\times\vec{v_l}$, *que hemos calculado anteriormente,* $\overrightarrow{n_\tau}=(0,7,-21)\approx(0,1,-3)$

Luego $\tau: y-3z+D=0$. *Como la recta s está en el plano* τ, $P_s(-1,1,1)$ *es de* τ *por lo que:* $1-3\cdot 1+D=0;\ 1-3+D=0;\ -2+D=0;\ D=2$. *Luego* $\tau: y-3z+2=0$.

$$d(s,l)=d(P_l,\tau)=\left.\begin{cases}P_l=(-1,0,2)\\ \tau: y-3z+2=0\end{cases}\right\}=\frac{|0-3.2+2|}{\sqrt{0^2+1^2+(-3)^2}}=\frac{|-4|}{\sqrt{10}}=\frac{4}{\sqrt{10}}\approx 1'2649\ u.l.$$

Por lo tanto, $\mathbf{d(s,l)}=\dfrac{2\sqrt{10}}{5}\ u.l.\approx\mathbf{1'2649\ u.l.}$