Matemáticas II Junio 2014

OPCIÓN B

PROBLEMA B.1. Se dan las matrices $A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-2\\ 1\\ -1\end{pmatrix}$ y $C=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 3\end{pmatrix}$.

Obtener **razonadamente**, **escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado**:

a) La matriz inversa A^{-1} de la matriz A. *(3 puntos)*

b) La matriz X que es solución de la ecuación $A\,X = B\,C$. *(4 puntos)*

c) El determinante de la matriz $2\,M^3$, siendo M una matriz cuadrada de orden 2 cuyo determinante vale 1/2. *(3 puntos)*

Solución:

a) Calculemos $|A|$ para asegurarnos de que existe A^{-1}.

$$|A|=\begin{vmatrix}1 & -1 & 1\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{vmatrix}=1\neq 0 \quad\to\quad \exists\, A^{-1}$$

Calculamos A^{-1} por el método de los adjuntos,

$$A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\xrightarrow{menores}\begin{pmatrix}\begin{vmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}0 & 1\\ 0 & 1\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{vmatrix}\\ \begin{vmatrix}-1 & 1\\ 0 & 1\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}1 & -1\\ 0 & 0\end{vmatrix}\\ \begin{vmatrix}-1 & 1\\ 1 & 1\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}1 & -1\\ 0 & 1\end{vmatrix}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ -1 & 1 & 0\\ -2 & 1 & 1\end{pmatrix}\xrightarrow{adjuntos}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 0\\ -2 & -1 & 1\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{traspuesta}\begin{pmatrix}1 & 1 & -2\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

Finalmente, $A^{-1}=\dfrac{1}{|A|}\begin{pmatrix}1 & 1 & -2\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=\dfrac{1}{1}\begin{pmatrix}1 & 1 & -2\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 1 & -2\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$

Solución: $A^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 1 & -2\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$

b) Obtener la matriz $X\ /\ A\,X = B\,C$

En el apartado anterior hemos obtenido la matriz A^{-1}*, multiplicando la ecuación anterior por* A^{-1} *por la izquierda:* $A^{-1}\,A\,X = A^{-1}\,B\,C \quad \to \quad I\,X = A^{-1}\,B\,C \quad \to \quad X = A^{-1}\,B\,C$

Calculemos la matriz X *mediante el producto anterior,*

$$X = A^{-1}\,B\,C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1(-2)+1\,.\,1-2(-1) \\ 0(-2)+1\,.\,1-1(-1) \\ 0(-2)+0\,.\,1+1(-1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 \\ -2 & 2 & 6 \\ 1 & -1 & -3 \end{pmatrix}$$

Solución: $X = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 \\ -2 & 2 & 6 \\ 1 & -1 & -3 \end{pmatrix}$

c) Sabemos que M *es una matriz* $2x2$ *y que* $|M| = \dfrac{1}{2}$*, hay que calcular* $|2\,M^3|$

De las propiedades de los determinantes sabemos que $|M\ N| = |M|\,|N|$ *y que si* M *es* $n\,x\,n$ $|\alpha\,M| = \alpha^n\,|M|$.

$$|2\,M^3| = |2\,M\ M\ M| = |2\,M\ |\,|M|\,|M| = 2^2\,|M|\,|M|\,|M| = 4\,(|M|)^3 = 4\left(\frac{1}{2}\right)^3 = 4\,\frac{1}{8} = \frac{1}{2}$$

Solución: $|2\,M^3| = \dfrac{1}{2}$