Matemáticas II Junio 2014

OPCIÓN B

PROBLEMA B.2. Se da el triángulo T, cuyos vértices son $A = (1, 2, -2)$, $B = (0, -3, 1)$ y $C = (-1, 0, 0)$,

y los planos π_1: $x + y + z + 1 = 0$ y $\pi_2 : \begin{cases} x = -\alpha + \beta + 1 \\ y = \alpha - 2\beta \\ z = \alpha + \beta \end{cases} \quad \alpha, \beta \in \Re$.

Obtener **razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado**:

a) La posición relativa del plano π_1 y del plano que contiene al triángulo T. *(4 puntos)*

b) Un vector $\vec{n_1}$ perpendicular al plano π_1 y un vector $\vec{n_2}$ perpendicular al plano π_2 *(1,5 puntos)* y el coseno del ángulo formado por los vectores $\vec{n_1}$ y $\vec{n_2}$. *(1,5 puntos)*

c) Las ecuaciones paramétricas de la recta intersección del los planos π_1 y π_2. *(3 puntos)*

Solución:

a) Posición relativa del plano π_1 y del plano que contiene al triángulo T, lo llamaremos π_3.

De π_3 conocemos: $\begin{cases} \text{punto} \quad C = (-1,0,0) \\ \text{vectores directores} \begin{cases} \overrightarrow{AC} = (-2,-2,2) \\ \overrightarrow{BC} = (-1,3,-1) \end{cases} \end{cases}$

La ecuación del plano π_3 se obtiene:

$$\begin{vmatrix} x-(-1) & y-0 & z-0 \\ -2 & -2 & 2 \\ -1 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 0 \quad \rightarrow \quad \begin{vmatrix} x+1 & y & z \\ -2 & -2 & 2 \\ -1 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 0 \quad \rightarrow$$

$$(x+1)\begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} - y\begin{vmatrix} -2 & 2 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} + z\begin{vmatrix} -2 & -2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 0 \quad \rightarrow \quad (x+1)(-4) - y\,.\,4 + z\,(-8) = 0$$

$$-4x - 4 - 4y - 8z = 0$$

$$4x + 4y + 8z + 4 = 0$$

$$x + y + 2z + 1 = 0$$

Estudiemos la posición relativa de los planos π_1 y π_3, para ello estudiamos el sistema formado por sus dos ecuaciones:

$\begin{cases} x + y + z = -1 \\ x + y + 2z = -1 \end{cases}$ *, de este sistema su matriz ampliada es* $M' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 & -1 \end{array}\right)$

La matriz de coeficientes, M, es 2 x 3, su máximo rango será 2. M´ es 2 x 4, su máximo rango será 2. Estudiemos el rango de M:

$|1| = 1 \neq 0 \quad \rightarrow \quad ran(M) \geq 1$

$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 - 1 = 1 \neq 0 \quad \rightarrow \quad ran(M) = 2$

Y, como el máximo rango de M´ es 2, ran (M´) = 2

Luego ran (M) = ran (M´) = 2 < nº de incógnitas = 3 entonces ***los dos planos se cortan en una recta****.*

b) $\pi_1 : x+y+z+1=0 \quad \rightarrow \quad \vec{n_1} = (1,1,1)$.

Para obtener el vector $\vec{n_2}$ / $\vec{n_2} \perp \pi_2$, *obtengamos la ecuación general del plano* π_2 *(además, la necesitaremos en el apartado c))*

Del plano π_2 *conocemos:* $\begin{cases} \text{punto} \quad (1,0,0) \\ \text{vectores directores} \begin{cases} \overrightarrow{u_2} = (-1,1,1) \\ \overrightarrow{v_2} = (1,-2,1) \end{cases} \end{cases}$

La ecuación del plano π_2 *se obtiene:*

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-0 & z-0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad \rightarrow \quad (x-1)\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} - y\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + z\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 0 \quad \rightarrow \quad (x-1).3 - y(-2) + z.1 = 0$$

$$3x-3+2y+z=0 \quad \rightarrow \quad \pi_2 : 3x+2y+z-3=0 \quad \rightarrow \quad \vec{n_2} = (3,2,1)$$

Por lo tanto, $\vec{n_1} = (1,1,1)$ *y* $\vec{n_2} = (3,2,1)$

Calculemos el coseno del ángulo que forman los vectores anteriores:

$$\cos\left(\vec{n_1}, \vec{n_2}\right) = \frac{\vec{n_1} \cdot \vec{n_2}}{\left|\vec{n_1}\right| \left|\vec{n_2}\right|} = \frac{(1,1,1)\cdot(3,2,1)}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}\,\sqrt{3^2+2^2+1^2}} = \frac{3+2+1}{\sqrt{3}\,\sqrt{14}} = \frac{6}{\sqrt{42}} = \frac{6\sqrt{42}}{42} = \frac{\sqrt{42}}{7} \approx 0'9258$$

Por lo tanto, $\cos\left(\vec{n_1}, \vec{n_2}\right) = \frac{\sqrt{42}}{7} \approx 0'9258$

c) Llamamos $r : \pi_1 \cap \pi_2$

Luego $r : \begin{cases} x+y+z+1=0 \\ 3x+2y+z-3=0 \end{cases}$

Como $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 2-3=-1 \neq 0$, *el sistema a resolver es:* $\begin{cases} x+y=-1-z \\ 3x+2y=3-z \end{cases}$. *Podemos resolverlo por Cramer,*

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -1-z & 1 \\ 3-z & 2 \end{vmatrix}}{-1} = \frac{-2-2z-3+z}{-1} = \frac{-5-z}{-1} = 5+z$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -1-z \\ 3 & 3-z \end{vmatrix}}{-1} = \frac{3-z+3+3z}{-1} = \frac{6+2z}{-1} = -6-2z$$

Las ecuaciones paramétricas de r son: $\begin{cases} x = 5+\lambda \\ y = -6-2\lambda \\ z = \lambda \end{cases} \qquad \lambda \in \Re$