PROBLEMA A.1. Se dan las matrices $A=\begin{pmatrix}1 & -3\\ 2 & 2\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 2 & -2\end{pmatrix}$.

Obtener **razonadamente**, **escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado**:

a) La matriz inversa de la matriz A. *(2 puntos)*

b) Las matrices X e Y de orden 2 x 2 tales que $X A = B$ y $A Y = B$. *(2 + 2 puntos)*

c) **Justificar razonadamente** que si M una matriz cuadrada tal que $M^2 = I$, donde I es la matriz identidad del mismo orden que M, entonces se verifica la igualdad $M^3 = M^7$. *(4 puntos)*

Solución:

a) A^{-1}?

Comprobemos si existe A^{-1}.

$$|A|=\begin{vmatrix}1 & -3\\ 2 & 2\end{vmatrix}=2+6=8\neq 0 \quad\rightarrow\quad \exists\, A^{-1}$$

Calculemos A^{-1},

$$A=\begin{pmatrix}1 & -3\\ 2 & 2\end{pmatrix}\xrightarrow{menores}\begin{pmatrix}2 & 2\\ -3 & 1\end{pmatrix}\xrightarrow{adjuntos}\begin{pmatrix}2 & -2\\ 3 & 1\end{pmatrix}\xrightarrow{traspuesta}\begin{pmatrix}2 & 3\\ -2 & 1\end{pmatrix}$$

Finalmente, $A^{-1}=\dfrac{1}{|A|}\begin{pmatrix}2 & 3\\ -2 & 1\end{pmatrix}=\dfrac{1}{8}\begin{pmatrix}2 & 3\\ -2 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2/8 & 3/8\\ -2/8 & 1/8\end{pmatrix}$, *simplificando las fracciones:*

Solución: $A^{-1}=\begin{pmatrix}1/4 & 3/8\\ -1/4 & 1/8\end{pmatrix}$

b) ¿ X ? / $X\ A = B$

En el apartado anterior hemos obtenido A^{-1}. *Multiplicando por* A^{-1} *por la derecha:*

$X A A^{-1} = B A^{-1} \rightarrow X I = B A^{-1} \rightarrow X = B A^{-1}$, *por lo que*

$$X=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 2 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2/8 & 3/8\\ -2/8 & 1/8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{2}{8}-\frac{6}{8} & \frac{3}{8}+\frac{3}{8}\\ \frac{4}{8}+\frac{4}{8} & \frac{6}{8}-\frac{2}{8}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4/8 & 6/8\\ 8/8 & 4/8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1/2 & 3/4\\ 1 & 1/2\end{pmatrix}$$

¿ Y ? / $A\ Y = B$, *multiplicando por* A^{-1} *por la izquierda:*

$A^{-1} A Y = A^{-1} B \rightarrow I Y = A^{-1} B \rightarrow Y = A^{-1} B$, *luego:*

$$Y=\begin{pmatrix}2/8 & 3/8\\ -2/8 & 1/8\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 3\\ 2 & -2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{2}{8}+\frac{6}{8} & \frac{6}{8}-\frac{6}{8}\\ \frac{-2}{8}+\frac{2}{8} & \frac{-6}{8}-\frac{2}{8}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8/8 & 0\\ 0 & -8/8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$$

Solución: $X=\begin{pmatrix}-1/2 & 3/4\\ 1 & 1/2\end{pmatrix}$ *e* $Y=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$

c) Sea M una matriz cuadrada / $M^2 = I$, ¿$M^3 = M^7$?

Podemos resolverlo de dos formas diferentes:

**) Calculemos, por separado, M^3 y M^7*

$$\left.\begin{array}{l} M^3 = M^2\, M = (\text{como } M^2 = I) = I\ M = M \\ M^7 = M^2\, M^2\, M^2\ \ M = I\ I\ \ I\ M = M \end{array}\right\} \rightarrow \quad M^3 = M^7 \quad c.q.c.$$

***) Veamos si a partir de M^7 llegamos a M^3,*

$$M^7 = M^2\, M^2\, M^3 = I\ I\ M^3 = M^3 \qquad c.q.c.$$