PROBLEMA A.2. Obtener **razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado**:

a) La ecuación del plano π que pasa por el punto $P(2, 0, 1)$ y es perpendicular a la recta $r: \begin{cases} x+2y=0 \\ z=0 \end{cases}$ *(3 puntos)*

b) Las coordenadas del punto Q situado en la intersección de la recta r y del plano π. *(2 puntos)*

c) La distancia del punto P a la recta r *(3 puntos)* y **justificar razonadamente** que la distancia del punto P a un punto cualquiera de la recta r es mayor o igual que $\frac{3\sqrt{5}}{5}$. *(2 puntos)*

Solución:

a) ¿plano π? / $P \in \pi$ y $\pi \perp r$

Como $\pi \perp r$ un vector normal del plano π es un vector director de la recta r.
Obtengamos un vector director de r. Pasemos a paramétricas la ecuación de la recta r,

$$r: \begin{cases} x+2y=0 \\ z=0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x=-2y \\ z=0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x=-2\lambda \\ y=\lambda \quad \lambda \in \Re \\ z=0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} P_r(0,0,0) \\ \vec{v}_r(-2,1,0) \end{cases}$$

Por tanto del plano π conocemos $\begin{cases} \text{punto} \quad P(2,0,1) \\ \vec{n}_\pi(-2,1,0) \end{cases}$

La ecuación del plano π será: $-2x + y + 0 \,.\, z + D = 0 \rightarrow -2x + y + D = 0$
Determinamos el valor de D con la condición de que el punto P es del plano,
$-2 \,.\, 2 + 0 + D = 0 \rightarrow -4 + D = 0 \rightarrow D = 4$

Finalmente, $\boldsymbol{\pi : -2x + y + 4 = 0}$ ***o*** $\boldsymbol{\pi : 2x - y - 4 = 0}$

b) ¿Punto Q? / $Q = r \cap \pi$

Para obtener el punto Q resolvemos el sistema formado por las ecuaciones de la recta r y el plano π,

$$\begin{cases} x+2y=0 \\ z=0 \\ -2x+y+4=0 \end{cases}$$

este sistema nos da el valor de z (z = 0); obtendremos los valores de x e y resolviendo el sistema formado por la 1ª y 3ª ecuaciones.

$$\begin{cases} x+2y=0 \\ -2x+y+4=0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x+2y=0 \\ -2x+y=-4 \end{cases}$$

despejando x de la 1ª ecuación: $x = -2y$

y sustituyendo en la 2ª: $-2(-2y) + y = -4 \rightarrow 4y + y = -4 \rightarrow 5y = -4 \rightarrow y = \frac{-4}{5}$

luego, $x = -2\left(\frac{-4}{5}\right) = \frac{8}{5}$

Finalmente, $Q\left(\frac{8}{5}, \frac{-4}{5}, 0\right)$

c) ¿ d (P, r)?

Los cálculos realizados en los apartados anteriores, plano π (que es perpendicular a r por P) y punto Q (corte entre r y π) son los que corresponden para calcular d (P , r) = d (P, Q). Por tanto

$$d(P,r)=d(P,Q)=\sqrt{\left(2-\frac{8}{5}\right)^2+\left(0-\frac{-4}{5}\right)^2+(1-0)^2}=\sqrt{\left(\frac{2}{5}\right)^2+\left(\frac{4}{5}\right)^2+1}=\sqrt{\frac{4}{25}+\frac{16}{25}+1}=\sqrt{\frac{45}{25}}=\frac{3\sqrt{5}}{5}\ u.l.$$

También podemos calcular la distancia pedida por la fórmula correspondiente,

$$d(P,r)=\frac{\left|\overrightarrow{P_rP}\times\vec{v}_r\right|}{\left|\vec{v}_r\right|}\qquad \left.\begin{matrix}P(2,0,1)\\ P_r(0,0,0)\in r\end{matrix}\right\}\ \rightarrow\ \overrightarrow{P_rP}(2,0,1)\ \ y\ \ \vec{v}_r(-2,1-0)\{obtenido\ en\ a)\}$$

$$\overrightarrow{P_rP}\times\vec{v}_r=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\2&0&1\\-2&1&0\end{vmatrix}=2\vec{k}-2\vec{j}-\vec{i}=(-1,-2,2)$$

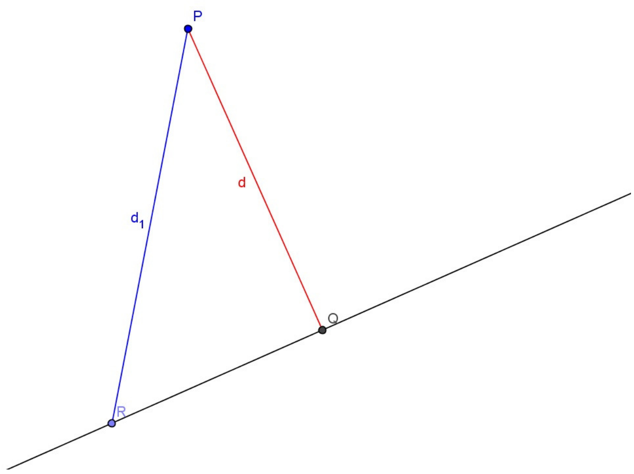
$$\left|\overrightarrow{P_rP}\times\vec{v}_r\right|=\sqrt{(-1)^2+(-2)^2+(2)^2}=\sqrt{1+4+4}=\sqrt{9}=3$$

$$\left|\vec{v}_r\right|=\sqrt{(-2)^2+(1)^2+(0)^2}=\sqrt{4+1}=\sqrt{5}$$

$$Luego,\ d(P,r)=\frac{\left|\overrightarrow{P_rP}\times\vec{v}_r\right|}{\left|\vec{v}_r\right|}=\frac{3}{\sqrt{5}}=\frac{3\sqrt{5}}{\sqrt{5}\sqrt{5}}=\frac{3\sqrt{5}}{5}\ u.l.$$

La justificación de que la distancia del punto P a un punto cualquiera de la recta r es mayor o igual que $\frac{3\sqrt{5}}{5}$*, viene de la definición de distancia de punto a recta como la menor de las distancias del punto a cualquier otro de la recta.*

Otra justificación. Gráficamente la distancia del punto P a la recta r se mide en perpendicular,



La distancia de P a cualquier punto de la recta r (distinto de Q), como se observa en el gráfico, sería la hipotenusa del triángulo rectángulo PQR; por tanto d_1 (hipotenusa) > d (cateto). Es decir, d (P, R) > d (P, Q) = d (P, r)

$$Luego,\ d(P,R)\geq\frac{3\sqrt{5}}{5}\ \ c.q.c$$

Una última forma de justificación sería estudiar la monotonía de la función d (P, R) siendo R un punto cualquiera de la recta r.

Según obtuvimos en el apartado a), de la ecuación paramétrica de r se deduce que cualquier punto de la recta r será: (– 2 λ , λ , 0) y como P (2, 0, 1),

$$d(P,R)=\sqrt{(2+2\lambda)^2+(0-\lambda)^2+(1-0)^2}=\sqrt{4+8\lambda+4\lambda^2+\lambda^2+1}=\sqrt{5+8\lambda+5\lambda^2}$$

Por cálculo el radicando es una suma de términos al cuadrado, luego para cualquier valor de λ este radicando es positivo. Podemos estudiar la monotonía de $d(P, R)$ estudiando la monotonía del radicando, es decir,

$$y = 5 + 8\lambda + 5\lambda^2$$

$$y' = 8 + 10\lambda$$

$$8 + 10\lambda = 0 \quad \rightarrow \quad 10\lambda = -8 \quad \rightarrow \quad \lambda = \frac{-8}{10} = \frac{-4}{5}$$

Como $8 + 10\lambda$ es, gráficamente, una recta de pendiente positiva, a la izquierda de $\frac{-4}{5}$ es negativa y a la derecha positiva. Por tanto para $\lambda = \frac{-8}{5}$ hay un mínimo relativo, que por lo dicho anteriormente es el absoluto de $d(P, R)$.

$$\text{Para } \lambda = \frac{-8}{5}, \begin{cases} x = -2\dfrac{-4}{5} = \dfrac{16}{5} \\ y = \dfrac{-4}{5} \\ z = 0 \end{cases} \rightarrow \quad R\left(\frac{8}{5}, \frac{-4}{5}, 0\right)$$

La mínima distancia es:

$$d(P, R) = \sqrt{\left(2 - \frac{8}{5}\right)^2 + \left(0 - \frac{-4}{5}\right)^2 + (1-0)^2} = \sqrt{\left(\frac{2}{5}\right)^2 + \left(\frac{4}{5}\right)^2 + 1} = \sqrt{\frac{4}{25} + \frac{16}{25} + 1} = \sqrt{\frac{45}{25}} = \frac{3\sqrt{5}}{5}$$

Por tanto, para cualquier punto de la recta r $d(P, R) \geq \frac{3\sqrt{5}}{5}$ *c.q.c.*