PROBLEMA A.3. Obtener **razonadamente**, **escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado**:

a) Los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de la función real f definida por $f(x) = (x-1)(x-3)$, siendo x un número real. *(3 puntos)*

b) El área del recinto acotado limitado entre las curvas $y = (x-1)(x-3)$ e $y = -(x-1)(x-3)$. *(4 puntos)*

c) El valor positivo de a para el cual el área limitada entre la curva $y = a(x-1)(x-3)$, el eje Y y el segmento que une los puntos (0, 0) y (1, 0) es 4/3. *(3 puntos)*

Solución:

a) Para obtener los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función tenemos que estudiar el signo de $f'(x)$.

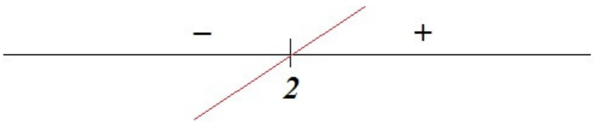
$f(x) = (x-1)(x-3)$, efectuando las operaciones: $f(x) = x^2 - 4x + 3$

Dom $f(x) = \Re$, por ser una función polinómica.

$f'(x) = 2x - 4$

$2x - 4 = 0$; $2x = 4$; $x = 2$

Para obtener el signo de $f'(x)$ consideremos que $f'(x)$ es un polinomio de primer grado con coeficiente de x positivo cuya raíz es $x = 2$, es decir:



Por tanto, ***f(x) es creciente en*** $(2, +\infty)$ ***y decreciente en*** $(-\infty, 2)$

b) Área del recinto acotado limitado entre las curvas

$y = (x-1)(x-3) = x^2 - 4x + 3$ e

$y = -(x-1)(x-3) = -x^2 + 4x - 3$

Busquemos los puntos de corte entre las dos curvas:

$x^2 - 4x + 3 = -x^2 + 4x - 3$

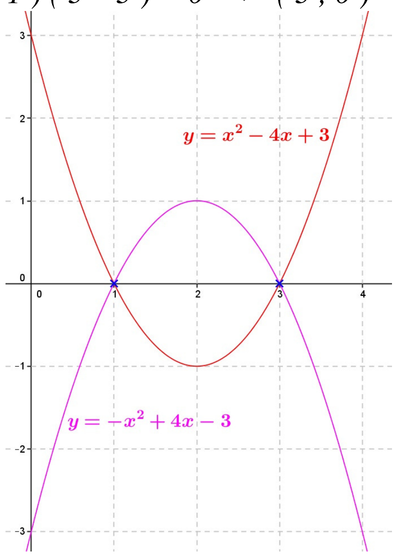
$2x^2 - 8x + 6 = 0$; *simplificando entre dos:* $x^2 - 4x + 3 = 0 \rightarrow (x-1)(x-3) = 0 \rightarrow$

$$\begin{cases} x-1=0 \rightarrow x=1 \\ x-3=0 \rightarrow x=3 \end{cases}$$

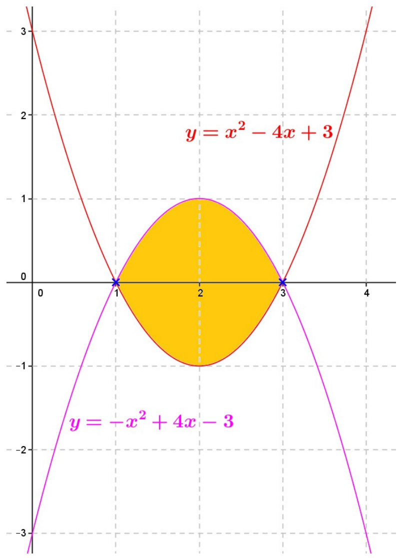
Para $x = 1$, $y = (1-1)(1-3) = 0 \rightarrow (1, 0)$

Para $x = 3$, $y = (3-1)(3-3) = 0 \rightarrow (3, 0)$

Como las dos curvas son parábolas, podemos realizar la representación gráfica rápidamente:



El área pedida será:



Esta área la obtenemos a partir del siguiente cálculo integral:

$$A=\int_1^3\left[\left(-x^2+4x-3\right)-\left(x^2-4x+3\right)\right]dx=\int_1^3\left[-2x^2+8x-6\right]dx=\left[\frac{-2x^3}{3}+\frac{8x^2}{4}-6x\right]_1^3=$$

$$=\left[\frac{-2x^3}{3}+4x^2-6x\right]_1^3=\left(\frac{-2.3^3}{3}+4.3^2-6.3\right)-\left(\frac{-2.1^3}{3}+4.1^2-6.1\right)=(-18+36-18)-\left(\frac{-2}{3}+4-6\right)=$$

$$=0-\left(\frac{-2}{3}-2\right)=\frac{2}{3}+2=\frac{8}{3}\,u.a.$$

Solución: $A=\frac{8}{3}\,u.a.$

c) El valor positivo de a para el cual el área limitada entre la curva y = a (x – 1) (x – 3), el eje Y y el segmento que une los puntos (0, 0) y (1, 0) es 4/3.

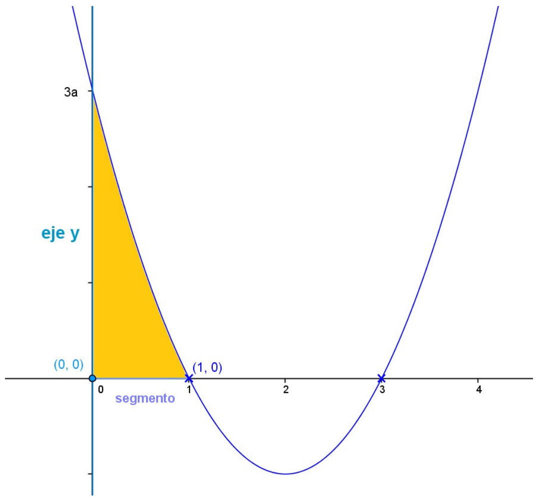
Representación gráfica del problema.

y = a (x – 1) (x – 3) = a (x2 – 4 x + 3), como el valor de a deber ser positivo la parábola tiene la forma: $\cup$

Calculamos algunos valores para representar la parábola

x	y
1	0
3	0
0	$3a$

Añadiendo el segmento que une los puntos (0, 0) y (1, 0) y el eje Y. El área que queremos calcular es:



Esta área la calculamos mediante la integral:

$$\int_0^1 a\left(x^2-4x+3\right)dx=a\int_0^1\left(x^2-4x+3\right)dx=a\left[\frac{x^3}{3}-4\frac{x^2}{2}+3x\right]_0^1=a\left[\left(\frac{1^3}{3}-4\frac{1^2}{2}+3.1\right)-0\right]=a\left(\frac{1}{3}-2+3\right)=$$

$$=a\left(\frac{1}{3}+1\right)=a\,\frac{4}{3}$$

Como deber ser $a\,\frac{4}{3}=\frac{4}{3}\quad\rightarrow\quad a=1$

Solución: a = 1