PROBLEMA B.2. Se dan las rectas $r:\begin{cases} x-y+3=0 \\ 2x-z+2=0 \end{cases}$ y $s:\begin{cases} 3y+1=0 \\ x-2z-3=0 \end{cases}$.

Obtener **razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado**:

a) El plano paralelo a la recta s que contiene a la recta r. *(3 puntos)*

b) La recta t que pasa por el punto (0, 0, 0), sabiendo que un vector director de t es perpendicular a un vector director de r y también es perpendicular a un vector director de s. *(3 puntos)*

c) **Averiguar razonadamente** si existe o no un plano perpendicular a s que contenga a la recta r. *(4 puntos)*

Solución:

a) ¿Plano paralelo a s que contiene a r?

$\pi \,//\, s \rightarrow \vec{v_s}$ *será director de* π

$r \subset \pi \rightarrow P_r \in \pi$ *y* $\vec{v_r}$ *será director de* π

Obtengamos los elementos de r y s necesarios. Nos interesa obtener las ecuaciones paramétricas de ambas rectas.

$r:\begin{cases} x-y \quad = -3 \\ 2x \quad -z = -2 \end{cases}$ *como* $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$, *despejamos x e y en función de z.*

$$\begin{cases} x-y = -3 \\ 2x = -2+z \end{cases} \rightarrow \quad x = \frac{\begin{vmatrix} -3 & -1 \\ -2+z & 0 \end{vmatrix}}{2} = \frac{-2+z}{2} = -1+\frac{z}{2}, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 2 & -2+z \end{vmatrix}}{2} = \frac{-2+z+6}{2} = \frac{4+z}{2} = 2+\frac{z}{2} \quad \rightarrow \quad r:\begin{cases} x = -1+\frac{1}{2}\lambda \\ y = 2+\frac{1}{2}\lambda \\ z = \lambda \end{cases} \quad \lambda \in \Re$$

Por tanto: $r:\begin{cases} P_r(-1, 2, 0) \\ \vec{v_r}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1\right) \approx (1, 1, 2) \end{cases}$

$$s:\begin{cases} 3y+1=0 \\ x-2z-3=0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 3y=-1 \\ x=3+2z \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y=\frac{-1}{3} \\ x=3+2z \end{cases} \rightarrow s:\begin{cases} x=3+2\mu \\ y=\frac{-1}{3} \\ z=\mu \end{cases} \quad \mu \in \Re$$

Por tanto: $s:\begin{cases} P_s\left(3, \frac{-1}{3}, 0\right) \\ \vec{v_s}(2, 0, 1) \end{cases}$

Luego, del plano π *conocemos: punto* $P_r(-1, 2, 0)$ *y vectores directores* $\vec{v_r}(1, 1, 2)$, $\vec{v_s}(2, 0, 1)$

La ecuación del plano π será: $\begin{vmatrix} x+1 & y-2 & z \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$

$$x + 1 + 4(y-2) - 2z - (y-2) = 0$$
$$x + 1 + 4y - 8 - 2z - y + 2 = 0$$
$$x + 3y - 2z - 5 = 0$$

Solución: $\boldsymbol{\pi: \ x + 3y - 2z - 5 = 0}$

b) ¿recta t? / $(0,0,0) \in t$ y $\vec{v}_t \perp \left(\vec{v}_r \ \ y \ \ \vec{v}_s \right)$

$\vec{v}_t \perp \left(\vec{v}_r \ \ y \ \ \vec{v}_s \right)$, *por lo tanto* $\vec{v}_t = \vec{v}_r \times \vec{v}_s = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \vec{i} + 4\vec{j} - 2\vec{k} - \vec{j} = \vec{i} + 3\vec{j} - 2\vec{k} = (1,3,-2)$

Y la ecuación paramétrica de la recta t será: $t: \begin{cases} x = 0 + \lambda \\ y = 0 + 3\lambda \\ z = 0 - 2\lambda \end{cases} \ \lambda \in \Re \ \rightarrow \ t: \begin{cases} x = \lambda \\ y = 3\lambda \\ z = -2\lambda \end{cases} \ \lambda \in \Re$

Solución: $t: \begin{cases} x = \lambda \\ y = 3\lambda \\ z = -2\lambda \end{cases} \ \lambda \in \Re$

c) ¿Existe un plano π / $s \perp \pi$ y $r \subset \pi$?

Como $s \perp \pi \ \rightarrow \ \vec{n}_\pi = \vec{v}_s = (2,0,1)$ $\quad \left[\vec{n}_\pi \ \textit{vector perpendicular al plano } \pi \right]$

Como $r \subset \pi \ \rightarrow \ \vec{v}_r \perp \vec{n}_\pi$

Veamos si esto último es cierto,

$\vec{v}_r \cdot \vec{n}_\pi = (1,1,2) \cdot (2,0,1) = 2 + 0 + 2 = 4 \neq 0$, *por tanto estos vectores no son perpendiculares.*

En conclusión, ***el plano π pedido no existe.***