PROBLEMA A.1. Se da el sistema de ecuaciones $\begin{cases} ax \quad\quad -z = a \\ 2x + ay + z = 1 \\ 2x \quad\quad + z = 2 \end{cases}$

Donde a es un parámetro real. Obtener **razonadamente**, **escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado**:

a) Los valores del parámetro a para los cuales el sistema es incompatible *(4 puntos)*
b) Todas las soluciones del sistema cuando este sea compatible indeterminado. *(3 puntos)*
c) La solución del sistema cuando $a = -1$. *(3 puntos)*

Solución:
En primer lugar estudiamos el sistema y después responderemos las preguntas.

La matriz ampliada de este sistema es: $A' = \left(\begin{array}{ccc|c} a & 0 & -1 & a \\ 2 & a & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$

A es una matriz 3x3, por tanto el máximo rango de A es 3.
A´ es una matriz 3x4, por tanto el máximo rango de A es 3.
Empezamos estudiando el rango de A

$$|A| = \begin{vmatrix} a & 0 & -1 \\ 2 & a & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = a^2 + 2a$$

$$a^2 + 2a = 0 \quad \rightarrow \quad a(a+2) = 0 \quad \begin{cases} a = 0 \\ a + 2 = 0 \quad \rightarrow \quad a = -2 \end{cases}$$

Entonces,

para $a \neq -2$ y 0, $|A| \neq 0 \rightarrow$ *ran(A) = 3 y, como el máximo rango de A´ es 3, ran(A´) = 3, por lo que ran(A) = ran(A´) = 3 = nº incógnitas* $\rightarrow$ ***Sistema Compatible Determinado***

para $a = -2$, $|A| = 0 \rightarrow$ *ran(A)* ≤ 2

La matriz ampliada del sistema queda: $A' = \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 0 & -1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$

Como $F_3 = -F_1$, en el estudio del rango de A´ podemos eliminar la fila 3.

Quedaría $\left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 0 & -1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 & 1 \end{array}\right)$

Calculemos el rango de A (como A es 2x3, el máximo rango de A será 2),

$$\left.\begin{array}{l} |-2| = -2 \neq 0 \quad \rightarrow \quad ran(A) \geq 1 \\ \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = 4 \neq 0 \quad \rightarrow \quad ran(A) \geq 2 \end{array}\right\} \rightarrow \quad ran(A) = 2$$

Como el máximo rango de A´ también sería 2 (A´es 2x4) $\rightarrow$ *ran(A´) = 2*

Por tanto, ran(A) = ran(A´) = 2 < nº de incógnitas $\rightarrow$ ***Sistema Compatible Indeterminado.***

para a = 0, $|A| = 0 \rightarrow ran(A) \le 2$

La matriz ampliada del sistema queda: $A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$

Calculemos el rango de A,

$$\left.\begin{array}{l} |2| = 2 \neq 0 \quad \rightarrow \quad ran(A) \ge 1 \\ \\ \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0 \quad \rightarrow \quad ran(A) \ge 2 \end{array}\right\} \rightarrow \quad ran(A) = 2$$

Calculemos el rango de A´,

Considerando el estudio realizado anteriormente ran(A´) ≥ 2, el menor de orden 3 de A´ por estudiar es:

$$\begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -2 + 4 = 2 \neq 0 \quad \rightarrow \quad ran(A') = 3$$

Por tanto, ran(A) = 2 ≠ 3 = ran(A´) $\rightarrow$ ***Sistema Incompatible***

Respondamos a las preguntas,

a) El sistema es incompatible para a = 0.

b) El sistema es compatible indeterminado para a = – 2.

Del estudio realizado anteriormente, el sistema a resolver en este caso es:

$$\begin{cases} -2x \qquad\quad -z = -2 \\ 2x - 2y + z = 1 \end{cases}$$ *Siendo x e y las incógnitas principales*

$$\begin{cases} -2x \qquad = -2 + z \\ 2x - 2y = 1 - z \end{cases} \rightarrow \quad x = \frac{\begin{vmatrix} -2+z & 0 \\ 1-z & -2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 2 & -2 \end{vmatrix}} = \frac{4-2z}{4} = 1 - \frac{z}{2}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} -2 & -2+z \\ 2 & 1-z \end{vmatrix}}{4} = \frac{-2+2z+4-2z}{4} = \frac{1}{2}$$

Finalmente, ***para a = – 2 las soluciones del sistema son:*** $\begin{cases} x = 1 - \dfrac{\lambda}{2} \\ y = \dfrac{1}{2} \\ z = \lambda \end{cases} \qquad \lambda \in \Re$

c) Solución para a = – 1

Si a = – 1, a ≠ – 2 y 0, por lo que el sistema es compatible determinado

El sistema es $\begin{cases} -x \quad -z = -1 \\ 2x - y + z = 1 \\ 2x \quad + z = 2 \end{cases}$ *Como es un S.C.D. lo resolvemos por Cramer.*

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{1-2}{1-2} = 1 \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix}}{-1} = \frac{-1-4-2+2+2+2}{-1} = \frac{-1}{-1} = 1$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{vmatrix}}{-1} = \{F_3 = -2xF_1\} \frac{0}{-1} = 0$$

La solución del sistema para a = – 1 es: { x = 1, y= 1, z = 0}