PROBLEMA A.2. Se dan las rectas $r:\begin{cases} x-2y+z+3=0 \\ 3x+y-z+1=0 \end{cases}$ y $s:\begin{cases} x=1 \\ y=2\alpha \\ z=\alpha-2 \end{cases}$.

Obtener **razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado**:

a) La recta paralela a r que pasa por el punto (0,1,0). *(3 puntos)*

b) El plano π que contiene a la recta r y es paralelo a s. *(3 puntos)*

c) La distancia entre las rectas r y s. *(4 puntos)*

Solución:

a) ¿Recta t? / $t \parallel r$ y $(0,1,0) \in t$

Obtengamos la ecuación paramétrica de r.

En la recta r, $\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 1+6=7 \neq 0$

Por tanto resolvemos el sistema: $r:\begin{cases} x-2y=-z-3 \\ 3x+y=z-1 \end{cases}$

$$x=\frac{\begin{vmatrix} -z-3 & -2 \\ z-1 & 1 \end{vmatrix}}{7}=\frac{-z-3+2z-2}{7}=\frac{-5+z}{7}=\frac{-5}{7}+\frac{z}{7}$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix} 1 & -z-3 \\ 3 & z-1 \end{vmatrix}}{7}=\frac{z-1+3z+9}{7}=\frac{8+4z}{7}=\frac{8}{7}+\frac{4z}{7}$$

$$\rightarrow \quad r:\begin{cases} x=\dfrac{-5}{7}+\dfrac{\lambda}{7} \\ y=\dfrac{8}{7}+\dfrac{4\lambda}{7} \\ z=\lambda \end{cases} \quad \lambda \in \Re \quad \rightarrow$$

$$\rightarrow \quad r:\begin{cases} P_r\left(\dfrac{-5}{7},\dfrac{8}{7},0\right) \\ \vec{v}_r\left(\dfrac{1}{7},\dfrac{4}{7},1\right) \approx (1,4,7) \end{cases}$$

De la recta t hemos obtenido $\begin{cases} punto \quad (0,1,0) \\ como\ t \parallel r \rightarrow \vec{v}_t \parallel \vec{v}_r \quad \rightarrow \quad \vec{v}_t=(1,4,7) \end{cases}$ *por lo que **la ecuación paramétrica de la recta t será:*** $\begin{cases} x=\mu \\ y=1+4\mu \\ z=7\mu \end{cases} \quad \mu \in \Re$

b) ¿Plano π? / $r \subset \pi$ y $\pi \parallel s$

Como $r \subset \pi \rightarrow P_r\left(\dfrac{-5}{7},\dfrac{8}{7},0\right) \in \pi$ *y* $\vec{v}_r$ *es vector director de **π**.*

Como $\pi \parallel s \rightarrow \vec{v}_s$ *es vector director de **π**.*

La ecuación general del plano π la obtenemos: $\begin{vmatrix} x+\dfrac{5}{7} & y-\dfrac{8}{7} & z \\ 1 & 4 & 7 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix}=0$

$$\left(x+\frac{5}{7}\right)4+2z-14\left(x+\frac{5}{7}\right)-\left(y-\frac{8}{7}\right)=0$$

$$-10\left(x+\frac{5}{7}\right)+2z-\left(y-\frac{8}{7}\right)=0$$

$$-10x-\frac{50}{7}+2z-y+\frac{8}{7}=0$$

$$-10x-y+2z-6=0$$

$$10x+y-2z+6=0$$

Solución: **π: 10 x + y – 2 z + 6 = 0**

c) ¿$d(r,s)$?

Estudiemos la posición relativa entre las rectas r y s.

Debemos estudiar el rango de la matriz $\begin{pmatrix} \vec{v_r} \\ \vec{v_s} \\ \overrightarrow{P_rP_s} \end{pmatrix}$. $\left.\begin{matrix} \vec{v_r}(1,4,7) \\ \vec{v_s}(0,2,1) \\ P_r\left(\frac{-5}{7},\frac{8}{7},0\right) \\ P_s(1,0,-2) \end{matrix}\right\} \rightarrow \overrightarrow{P_rP_s}\left(\frac{12}{7},\frac{-8}{7},-2\right)$

Rango de la matriz $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 0 & 2 & 1 \\ \frac{12}{7} & \frac{-8}{7} & -2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} |1| = 1 \neq 0 \rightarrow rango \geq 1 \\ \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 2 \neq 0 \rightarrow rango \geq 2 \\ \begin{vmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 0 & 2 & 1 \\ \frac{12}{7} & \frac{-8}{7} & -2 \end{vmatrix} = -4+\frac{48}{7}-24+\frac{8}{7} = -20 \neq 0 \rightarrow rango = 3 \end{cases}$

Por tanto las rectas r y s se cruzan y $d(r,s)=\dfrac{\left|\left[\vec{v_r}\ \vec{v_s}\ \overrightarrow{P_rP_s}\right]\right|}{\left|\vec{v_r}\times\vec{v_s}\right|}$

$$\left[\vec{v_r}\ \vec{v_s}\ \overrightarrow{P_rP_s}\right] = \{lo\ hemos\ obtenido\ en\ el\ cálculo\ del\ rango\} = -20$$

$$\vec{v_r}\times\vec{v_s} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 4 & 7 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 4\,\vec{i}+2\,\vec{k}-14\,\vec{i}-\vec{j} = -10\,\vec{i}-\vec{j}+2\,\vec{k} = (-10,-1,2)$$

$$\left|\vec{v_r}\times\vec{v_s}\right| = \sqrt{(-10)^2+(-1)^2+2^2} = \sqrt{105}$$

Finalmente, $d(r,s)=\dfrac{|-20|}{\sqrt{105}}=\dfrac{20}{\sqrt{105}}$

Otra forma de obtener d(r,s) es la siguiente:
El plano π del apartado anterior contiene a la recta r y es paralelo a la recta s $\rightarrow$ $d(r,s) = d(s,\pi)$ *y como la recta s es paralela al plano π* $\rightarrow$ $d(s,\pi) = d(P_s,\pi)$.

P_s *es un punto de la recta s, por ejemplo,* $P_s(1,0,-2)$
y el plano $\pi: 10x + y - 2z + 6 = 0$

Luego, $d(r,s) = d(P_s,\pi) = \dfrac{|10.1 + 0 - 2(-2) + 6|}{\sqrt{10^2 + 1^2 + (-2)^2}} = \dfrac{|10 + 4 + 6|}{\sqrt{105}} = \dfrac{20}{\sqrt{105}}$