PROBLEMA B.2. Se da el plano π: $6x + 3y + 2z - 12 = 0$ y los puntos $A(1,0,0)$, $B(0,2,0)$ y $C(0,0,3)$.

Obtener **razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado**:

a) La ecuación implícita del plano σ que pasa por los puntos *A, B y C,* *(2 puntos)* y la posición relativa de los planos σ y π. *(2 puntos)*

b) El área del triángulo de vértices *A, B y C*. *(3 puntos)*

c) Un punto P del plano π y el volumen del tetraedro cuyos vértices son *P, A, B y C*. *(3 puntos)*

Solución:

a) ¿plano σ que pasa por los puntos A(1,0,0), B(0,2,0) y C(0,0,3)?

$$\text{Del plano } \sigma \text{ conocemos } \begin{cases} \text{punto} \quad A(1,0,0) \\ \text{vectores directores} \begin{cases} \overrightarrow{AB}(-1,2,0) \\ \overrightarrow{AC}(-1,0,3) \end{cases} \end{cases}$$

La ecuación del plano σ será:

$$\begin{vmatrix} x-1 & y & z \\ -1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow 6(x-1)+2z+3y=0 \rightarrow 6x-6+2z+3y=0 \rightarrow 6x+3y+2z-6=0$$

Por tanto, $\boldsymbol{\sigma: 6x + 3y + 2z - 6 = 0}$

Posición relativa de σ y π:

Estudiemos el sistema formado por las ecuaciones de los dos planos,

$$\begin{cases} 6x+3y+2z-6=0 \\ 6x+3y+2z-12=0 \end{cases} \qquad \text{Como } \frac{6}{6}=\frac{3}{3}=\frac{2}{2}\neq\frac{-6}{-12}, \text{ **los planos } \sigma \text{ y } \pi \text{ son paralelos.**}$$

b) ¿Área del triángulo de vértices A, B y C?

El área del triángulo de vértices A, B y C la calculamos mediante la fórmula:

$$\text{Área} = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|$$

$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 6\vec{i}+2\vec{k}+3\vec{j} - = (6,3,2)$$

$$\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right| = \sqrt{6^2+3^2+2^2} = \sqrt{36+9+4} = \sqrt{49} = 7$$

$$\text{Área} = \frac{1}{2}7 = \frac{7}{2} \text{ u.a.}$$

Solución: el área del triángulo de vértices A, B y C es 7/2 u.a.

c) ¿ P ? / $P \in \pi$

Un punto P del plano π lo obtenemos a partir de la ecuación implícita del plano dando valores a, por ejemplo, x e y y obteniendo el valor de z.

Para $x = 0,\ y = 0 \rightarrow 6 \cdot 0 + 3 \cdot 0 + 2z - 12 = 0 \rightarrow 2z = 12 \rightarrow z = 6 \rightarrow$ $\boldsymbol{P(0,0,6)}$

El volumen del tetraedro de vértices P, A, B y C podemos obtenerlo de dos formas:

a) Mediante la fórmula: $V_{tetraedro} = \frac{1}{6}\left| \left[\overrightarrow{AP}\ \ \overrightarrow{BP}\ \ \overrightarrow{CP}\right] \right|$

$$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{AP} = (-1,0,6) \\ \overrightarrow{BP} = (0,-2,6) \\ \overrightarrow{CP} = (0,0,3) \end{array}\right\} \quad V_{tetraedro} = \frac{1}{6}\left| \left[\overrightarrow{AP}\ \ \overrightarrow{BP}\ \ \overrightarrow{CP}\right] \right| = \frac{1}{6}\left\| \begin{matrix} -1 & 0 & 6 \\ 0 & -2 & 6 \\ 0 & 0 & 3 \end{matrix} \right\| = \frac{1}{6}|6| = \frac{1}{6}6 = 1\,u^3$$

b) Podemos considerar como base del tetraedro el triángulo de vértices A, B y C que está sobre el plano σ*, y la altura la obtenemos sabiendo que* $P \in \pi$ *y que los planos* σ *y* π *son paralelos.*

$$V_{tetraedro} = \frac{1}{3}\,Área\_base\,.\,h = \frac{1}{3}\,A_{triángulo\ A,B,C}\ d(P,\sigma) \overset{*}{=}$$

$$A_{triángulo\ A,B,C} = \frac{7}{2} \quad (del\ apartado\ anterior)$$

$$d(P,\sigma) = \frac{|6\,.\,0 + 3\,.\,0 + 2\,.\,6 - 6|}{\sqrt{6^2 + 3^2 + 2^2}} = \frac{6}{7}$$

$$\overset{*}{=} \frac{1}{3}\,\frac{7}{2}\,\frac{6}{7} = \frac{42}{42} = 1\,u^3$$

Solución: El área de tetraedro pedido es 1 u^3.