PROBLEMA A.1. Se da el sistema de ecuaciones $\begin{cases} -x+a\,y+2\,z=a \\ 2\,x+a\,\,y-z=2 \\ a\,x-y+2\,z=a \end{cases}$

dependiente del parámetro real a. Obtener **razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado**:

a) La solución del sistema cuando $a = 2$. *(4 puntos)*

b) Los valores del parámetro a para los que el sistema es compatible y determinado. *(3 puntos)*

c) El valor del parámetro a para el que el sistema es compatible e indeterminado y obtener todas las soluciones del sistema para ese valor de a. *(2 + 2 puntos)*

Solución:

En primer lugar estudiamos el sistema y después responderemos las preguntas.

La matriz ampliada de este sistema es: $A' = \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & a & 2 & a \\ 2 & a & -1 & 2 \\ a & -1 & 2 & a \end{array}\right)$

A es una matriz 3x3, por tanto el máximo rango de A es 3.

A´ es una matriz 3x4, por tanto el máximo rango de A es 3.

Empezamos estudiando el rango de A

$$|A| = \begin{vmatrix} -1 & a & 2 \\ 2 & a & -1 \\ a & -1 & 2 \end{vmatrix} = -2a-4-a^2-2a^2+1-4a = -3a^2-6a-3$$

$$-3a^2-6a-3=0 \quad \rightarrow \quad a^2+2a+1=0 \quad \rightarrow \quad (a+1)^2=0 \quad \rightarrow \quad a+1=0 \quad \rightarrow \quad a=-1$$

Entonces,

para a ≠ – 1**, $/A/ \neq 0$ → ran(A) = 3 y, como el máximo rango de A´ es 3, ran(A´) = 3, por lo que ran(A) = ran(A´) = 3 = nº incógnitas → **Sistema Compatible Determinado

***para a = – 1** , $/A/ = 0$ → ran(A) ≤ 2*

La matriz ampliada del sistema queda: $A' = \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & -1 & 2 \\ -1 & -1 & 2 & -1 \end{array}\right)$

Como $F_3 = F_1$, en el estudio del rango de A´ podemos eliminar la fila 3.

Quedaría $\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & -1 & 2 \end{array}\right)$

Calculemos el rango de A (como A es 2x3, el máximo rango de A será 2),

$$\left.\begin{array}{l} |-1| = -1 \neq 0 \quad \rightarrow \quad ran(A) \geq 1 \\ \\ \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 1+2=3 \neq 0 \quad \rightarrow \quad ran(A) \geq 2 \end{array}\right\} \rightarrow \quad ran(A) = 2$$

Como el máximo rango de A´ también sería 2 (A´es 2x4) → ran(A´) = 2

*Por tanto, ran(A) = ran(A´) = 2 < nº de incógnitas → **Sistema Compatible Indeterminado.***

Respondamos a las preguntas,

a) Solución para a = ***2***

Si a = ***2****, a ≠* ***– 1****, por lo que el sistema es compatible determinado*

El sistema es $\begin{cases} -x+2\ y+2\ z=2 \\ 2\ x+2\ \ y-z=2 \\ 2\ x-y+2\ z=2 \end{cases}$ *Como es un S.C.D. lo resolvemos por Cramer.*

$$x=\frac{\begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix}}=\frac{8-4-4-8-2-8}{-4-4-4-8+1-8}=\frac{-18}{-27}=\frac{2}{3}$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 2 \end{vmatrix}}{-27}=\frac{-4+8-4-8-2-8}{-27}=\frac{-18}{-27}=\frac{2}{3}$$

$$z=\frac{\begin{vmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix}}{-27}=\frac{-4-4+8-8-2-8}{-27}=\frac{-18}{-27}=\frac{2}{3}$$

Para a = 2 la solución del sistema es: $\{\ x\ =\ y\ =\ z\ =\ \frac{2}{3}\}$

b) Según lo estudiado al principio ***el sistema es compatible determinado para a ≠ – 1****.*

c) Según lo estudiado al principio ***el sistema es compatible indeterminado para a = – 1****.*

Del estudio realizado anteriormente, para resolver el sistema usaremos la 1ª y 2ª ecuación y como incógnitas principales x e y (las que determinan el menor de orden dos no nulo).

El sistema a resolver es:

$$\begin{cases} -x-y=-1-2z \\ \ \ 2\ x-y=2+z \end{cases} \quad \rightarrow$$

$$x=\frac{\begin{vmatrix} 1-2z & -1 \\ 2+z & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}}=\frac{1+2z+2+z}{3}=\frac{3+3z}{3}=1+z$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix} -2 & -2+z \\ 2 & 1-z \end{vmatrix}}{3}=\frac{-2-z+2+4z}{3}=\frac{3z}{3}=z$$

Finalmente, ***para a = – 1 las soluciones del sistema son:*** $\begin{cases} x=1-\lambda \\ y=\lambda \\ z=\lambda \end{cases} \qquad \lambda\in\Re$