PROBLEMA A.2. Se dan el punto P = (1 , 1 , 1), la recta $r:\begin{cases} x+y-z+1=0 \\ x+2y-z-1=0 \end{cases}$ y el plano

π: x + y + z = 1 Obtener **razonadamente**, **escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado,** las ecuaciones de:

a) El plano que contiene al punto P y a la recta a *r*. *(2 puntos)*
b) La recta *s* que pasa por el punto P y es perpendicular al plano π , la distancia del punto P al plano π y el punto de intersección de la recta *s* con el plano π. *(2+2+2 puntos)*
c) El plano σ que contiene a la recta *r* y es perpendicular al plano *π*. *(2 puntos)*

Solución:

a) ¿Plano σ? / $P \in \sigma$ y $r \subset \sigma$

Obtengamos la ecuación paramétrica de r (para tener punto y vector director de r).

En la recta r, $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2-1=1\neq 0$

Por tanto resolvemos el sistema: $r:\begin{cases} x+y=-1+z \\ x+2y=1+z \end{cases}$

$$x=\frac{\begin{vmatrix} -1+z & 1 \\ 1+z & 2 \end{vmatrix}}{1}=\frac{-2+2z-1-z}{1}=-3+z$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix} 1 & -1+z \\ 1 & 1+z \end{vmatrix}}{1}=1+z+1-z=2$$

$$\rightarrow \quad r:\begin{cases} x=-3+\lambda \\ y=2 \\ z=\lambda \end{cases} \qquad \lambda\in\Re \qquad \rightarrow$$

$$\rightarrow \quad r:\begin{cases} P_r(-3\,,2\,,0) \\ \vec{v}_r(1\,,0\,,1) \end{cases}$$

El punto P (1 , 1 , 1) $\notin$ r (segunda coordenada $\neq 2$), luego podemos construir el plano pedido.

$$\sigma:\begin{cases} punto \quad P(1\,,1\,,1) \\ vectores \;\; directores: \begin{cases} \vec{v}_r(1\,,0\,,1) \\ \vec{PP_r}(4\,,-1\,,1) \end{cases} \end{cases}$$

La ecuación general del plano σ la obtenemos: $\begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z-1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 4 & -1 & 1 \end{vmatrix}=0$

$$(x-1)\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix}-(y-1)\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix}+(z-1)\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 4 & -1 \end{vmatrix}=0$$

$$(x-1)\,.\,1-(y-1)\,.\,(-3)+(z-1)\,.\,(-1)=0$$

$$x-1+3y-3-z+1=0$$

$$x+3y-z-3=0$$

Solución: $\boldsymbol{\sigma: \; x+3y-z-3=0}$

b)

b₁) ¿recta s? / $P \in s$ y $s \perp \pi$

$$s:\begin{cases} punto \quad P(1\,,1\,,1) \\ vector\ \ director, \quad como\ \ s \perp \pi \to : \vec{v_s} = \vec{n_\pi} = (1\,,1\,,1) \end{cases}$$

La ecuación paramétrica de la recta s será: $s:\begin{cases} x = 1+\lambda \\ y = 1+\lambda \\ z = 1+\lambda \end{cases} \qquad \lambda \in \Re$

b₂) ¿$d(P\,,\pi)$?. $P(1\,,1\,,1)$ y $\pi: x + y + z = 1 \ \to\ \pi: x + y + z - 1 = 0$

$$d(P\,,\pi) = \frac{|1+1+1-1|}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}} = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3} \qquad \to \qquad d(P\,,\pi) = \frac{2\sqrt{3}}{3}\ u.l.$$

b₃) ¿ $s \cap \pi$?

Sustituyendo los valores de x, y, z de la ecuación paramétrica de la recta r en la ecuación del plano π,

$1 + \lambda + 1 + \lambda + 1 + \lambda = 1$

$3 + 3\lambda = 1$

$3\lambda = 1 - 3$

$3\lambda = -2$

$\lambda = \dfrac{-2}{3}$

$\to$ $Q = s \cap \pi$

$$Q = \left(1-\frac{2}{3}\,,1-\frac{2}{3}\,,1-\frac{2}{3}\right) = \left(\frac{1}{3}\,,\frac{1}{3}\,,\frac{1}{3}\right)$$

Solución: $\mathbf{s \cap \pi = \left(\frac{1}{3}\,,\frac{1}{3}\,,\frac{1}{3}\right)}$

c) ¿Plano σ? / $r \subset \sigma$ y $\sigma \perp \pi$

$$\sigma:\begin{cases} punto \quad P_r(-3\,,2\,,0) \\ vectores\ \ directores: \begin{cases} r \subset \sigma \ \to\ \vec{u} = \vec{v_r}(1\,,0\,,1) \\ \sigma \perp \pi \ \to\ \vec{v} = \vec{n_\pi}(1\,,1\,,1) \end{cases} \end{cases}$$

La ecuación general del plano σ la obtenemos: $\begin{vmatrix} x+3 & y-2 & z \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$

$$(x+3)\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - (y-2)\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + z\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$(x+3)\,.\,(-1) - (y-2)\,.\,0 + z\,.\,1 = 0$

$-x - 3 + z = 0$

$-x + z - 3 = 0$

Solución: $\boldsymbol{\sigma: -x + z - 3 = 0}$