

PROBLEMA B.1. Obtener razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:

a) La comprobación de que $C^2 = 2C - I$, siendo $C = \begin{pmatrix} 5 & -4 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -4 & 4 & -1 \end{pmatrix}$ e I la matriz

identidad de orden 3×3 , (2,5 puntos)

y el valor de la matriz C^4 . (2,5 puntos)

b) El valor del determinante de la matriz $(3A^4)(4A^2)^{-1}$, sabiendo que A es una matriz cuadrada de cuatro columnas cuyo determinante vale -1 . (3 puntos)

c) La matriz B que admite inversa y que verifica la igualdad $B B = B$. (2 puntos)

Solución:

a) *Comprobemos que $C^2 = 2C - I$.*

$$C^2 = \begin{pmatrix} 5 & -4 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -4 & 4 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & -4 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -4 & 4 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \cdot 5 - 4 \cdot 2 - 2 \cdot 4 & -5 \cdot 4 + 4 \cdot 1 + 2 \cdot 4 & 5 \cdot 2 - 4 \cdot 1 - 2 \cdot 1 \\ 2 \cdot 5 - 1 \cdot 2 - 1 \cdot 4 & -2 \cdot 4 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 4 & 2 \cdot 2 - 1 \cdot 1 - 1 \cdot 1 \\ -4 \cdot 5 + 4 \cdot 2 + 1 \cdot 4 & 4 \cdot 4 - 4 \cdot 1 - 1 \cdot 4 & -4 \cdot 2 + 4 \cdot 1 + 1 \cdot 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 9 & -8 & 4 \\ 4 & -3 & 2 \\ -8 & 8 & -3 \end{pmatrix}$$

$$2C - I = 2 \begin{pmatrix} 5 & -4 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -4 & 4 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & -8 & 4 \\ 4 & -2 & 2 \\ -8 & 8 & -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & -8 & 4 \\ 4 & -3 & 2 \\ -8 & 8 & -3 \end{pmatrix}$$

Obtenemos el mismo resultado; por lo tanto queda comprobado que $C^2 = 2C - I$.

Calculemos C^4 ,

$$C^4 = C^2 \cdot C^2 = (2C - I) \cdot (2C - I) = 2C \cdot 2C - 2C \cdot I - I \cdot 2C + I^2 = 4C^2 - 2C - 2C + I =$$

$$= 4C^2 - 4C + I = 4(2C - I) - 4C + I = 8C - 4I - 4C + I = 4C - 3I =$$

$$4C - 3I = 4 \begin{pmatrix} 5 & -4 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -4 & 4 & -1 \end{pmatrix} - 3 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 & -16 & 8 \\ 8 & -4 & 4 \\ -16 & 16 & -4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 & -16 & 8 \\ 8 & -7 & 4 \\ -16 & 16 & -7 \end{pmatrix}$$

$$\text{Luego, } C^4 = \begin{pmatrix} 17 & -16 & 8 \\ 8 & -7 & 4 \\ -16 & 16 & -7 \end{pmatrix}$$

b) $|A| = -1$ y A es 4×4

Calculemos $|(3A^4)(4A^2)^{-1}|$

Considerando las propiedades de los determinantes:

$$|AB| = |A||B|, \quad |A^{-1}| = \frac{1}{|A|} \quad \text{y} \quad |nA| = n^4 |A| \quad (\text{por ser } A \text{ } 4 \times 4)$$

$$\begin{aligned} |(3 A^4)(4 A^2)^{-1}| &= |3 A^4| |(4 A^2)^{-1}| = 3^4 |A^4| \frac{1}{|(4 A^2)|} = 3^4 |A|^4 \frac{1}{4^4 |A^2|} = 81 \cdot (-1)^4 \frac{1}{256 |A^2|} = \frac{81}{256 |A|^2} = \\ &= \frac{81}{256 (-1)^2} = \frac{81}{256} \end{aligned}$$

Solución: $|(3 A^4)(4 A^2)^{-1}| = \frac{81}{256}.$

c) ¿ matriz B ? / existe B^{-1} y $B B = B$

Partimos de $B B = B$, como existe B^{-1} multiplicamos la igualdad por B^{-1} por la izquierda,

$$B^{-1} B B = B^{-1} B$$

$$I B = I$$

$$B = I$$

Solución: $B = I$ (B es la matriz identidad).