PROBLEMA B.2. Sea T un tetraedro de vértices O = (0,0,0), A = (1,1,1), B = (3,0,0) y C = (0,3,0).

Obtener **razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado**:

a) La ecuación del plano π que contiene a los puntos *A, B y C,* *(1 punto)*
y las ecuaciones de la recta h_0 perpendicular a π que pasa por O. *(2 puntos)*

b) El punto de intersección de la altura h_0 y el plano π. *(3 puntos)*

c) El área de la cara cuyos vértices son los puntos *A, B y C*, *(2 puntos)*
y el volumen del tetraedro *T*. *(2 puntos)*

Solución:

a) ¿plano π que pasa por los puntos A(1,1,1), B(3,0,0) y C(0,3,0)?

$$\text{Del plano } \pi \text{ conocemos } \begin{cases} \text{punto} \quad A(1,1,1) \\ \text{vectores directores} \begin{cases} \overrightarrow{AB}(2,-1,-1) \\ \overrightarrow{AC}(-1,2,1) \end{cases} \end{cases}$$

La ecuación del plano π será:

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z-1 \\ 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow$$

$$(x-1)\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} - (y-1)\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} + (z-1)\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

$$(x-1)\,3 - (y-1)\,(-3) + (z-1)\,3 = 0$$

$$3x-3+3y-3+3z-3=0 \rightarrow 3x+3y+3z-9=0 \rightarrow x+y+z-3=0$$

Por tanto, $\boldsymbol{\pi: \ x + y + z - 3 = 0}$

Recta $h_0 / O \in h_0$ y $h_0 \perp \pi$:

$$h_0 : \begin{cases} \text{Punto} \quad O(0,0,0) \\ \text{vector director, como } h_0 \perp \pi \quad \rightarrow \quad \vec{v}_{h_0} = \vec{n}_\pi(1,1,1) \end{cases}$$

Ecuaciones de h_0:

Ecuación vectorial: $(x, y, z) = (0, 0, 0) + \lambda(1, 1, 1) \quad \lambda \in \Re \quad \rightarrow$

$(x, y, z) = \lambda(1, 1, 1) \quad \lambda \in \Re$

$$\text{Ecuación paramétrica: } \begin{cases} x = \lambda \\ y = \lambda \quad \lambda \in \Re \\ z = \lambda \end{cases}$$

Ecuación continua: $x = y = z$

b) ¿ $h_0 \cap \pi$?

Sustituyendo los valores de x, y, z de la recta paramétrica en la ecuación del plano,

$\lambda + \lambda + \lambda - 3 = 0; \quad 3\lambda - 3 = 0; \quad 3\lambda = 3; \quad \lambda = 1$

El punto de corte entre la recta h_0 y el plano π es (1 , 1 , 1) *c) Área de la cara de vértices A, B y C*

Como es un tetraedro su cara es un triángulo de vértices A, B y C y calculamos su área mediante la fórmula: (los vectores a usar los calculamos en el apartado a))

$$Área = \frac{1}{2}\left| \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} \right|$$

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = \vec{i} + 4\vec{k} + \vec{j} - \vec{k} + 2\vec{i} + 2\vec{j} = 3\vec{i} + 3\vec{j} + 3\vec{k} = (3,3,3)$$

$$\left| \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} \right| = \sqrt{3^2 + 3^2 + 3^2} = \sqrt{27} = 3\sqrt{3}$$

$$Área = \frac{1}{2}\, 3\sqrt{3} = \frac{3\sqrt{3}}{2}\ u.a.$$

Solución: el área de la cara pedida es $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ ***u.a.***

El volumen del tetraedro de vértices O, A, B y C podemos obtenerlo de dos formas:

a) Mediante la fórmula: $V_{tetraedro} = \frac{1}{6}\left| \left[\overrightarrow{OA}\ \ \overrightarrow{OB}\ \ \overrightarrow{OC} \right] \right|$

$$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{OA} = (1,1,1) \\ \overrightarrow{OB} = (3,0,0) \\ \overrightarrow{OC} = (0,3,0) \end{array}\right\} \quad V_{tetraedro} = \frac{1}{6}\left| \left[\overrightarrow{OA}\ \ \overrightarrow{OB}\ \ \overrightarrow{OC} \right] \right| = \frac{1}{6}\left\| \begin{matrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \end{matrix} \right\| = \frac{1}{6}|9| = \frac{9}{6} = \frac{3}{2}\, u^3$$

b) Podemos considerar como base del tetraedro el triángulo de vértices A, B y C que está sobre el plano π, y la altura del tetraedro, que estaría sobre la recta que pasa por el punto O y es perpendicular al plano π (la recta h_0 *obtenida en el apartado a)); por tanto la altura del tetraedro es la distancia entre los puntos O (0,0,0) y el obtenido en el apartado b) P (1,1,1).*

$$V_{tetraedro} = \frac{1}{3}\, Área\_base\, .\, h = \frac{1}{3}\, A_{triágulo\ A,B,C}\ d(P,O) \overset{*}{=}$$

$$A_{triágulo\ A,B,C} = \frac{3\sqrt{3}}{2} \quad (del\ apartado\ anterior)$$

$$d(P,O) = \sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{3}$$

$$\overset{*}{=} \frac{1}{3}\, \frac{3\sqrt{3}}{2}\, \sqrt{3} = \frac{9}{6} = \frac{3}{2}\, u^3$$

Solución: El área de tetraedro pedido es $\frac{3}{2}$ $\boldsymbol{u^3}$***.***