PROBLEMA A.1. Se tiene el sistema de ecuaciones $\begin{cases} \quad\quad y - z = 1 - a \\ -x \quad\quad + z = 5 \\ -a\,x + y - z = 1 \end{cases}$

donde a es un parámetro real. Se pide obtener **razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado**:

a) Los valores del parámetro a para los cuales el sistema es compatible determinado. *(2 puntos)*

b) Las soluciones del sistema cuando $a = 3$. *(4 puntos)*

c) Las soluciones del sistema para los valores de a que lo hacen compatible indeterminado. *(4 puntos)*

Solución:

En primer lugar estudiamos el sistema y después responderemos las preguntas.

La matriz ampliada de este sistema es: $A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & -1 & 1-a \\ -1 & 0 & 1 & 5 \\ -a & 1 & -1 & 1 \end{array}\right)$

A es una matriz 3x3, por tanto el máximo rango de A es 3.

A´ es una matriz 3x4, por tanto el máximo rango de A es 3.

Empezamos estudiando el rango de A

$$|A| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -a & 1 & -1 \end{vmatrix} = 1 - a - 1 = -a$$

$$-a = 0 \quad \rightarrow \quad a = 0$$

Entonces,

para a ≠ 0, $|A| \neq 0 \rightarrow$ *ran(A) = 3 y, como el máximo rango de A´ es 3, ran(A´) = 3, por lo que ran(A) = ran(A´) = 3 = nº incógnitas* $\rightarrow$ ***Sistema Compatible Determinado***

para a = 0, $|A| = 0 \rightarrow ran(A) \leq 2$

La matriz ampliada del sistema queda: $A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right)$

Como $F_3 = F_1$, en el estudio del rango de A´ podemos eliminar la fila 3.

Quedaría $\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 5 \end{array}\right)$

Calculemos el rango de A (como A es 2x3, el máximo rango de A será 2),

$$\left.\begin{array}{l} |-1| = -1 \neq 0 \quad \rightarrow \quad ran(A) \geq 1 \\ \\ \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \quad \rightarrow \quad ran(A) \geq 2 \end{array}\right\} \rightarrow \quad ran(A) = 2$$

Como el máximo rango de A´ también sería 2 (A´es 2x4) $\rightarrow$ *ran(A´) = 2*

Por tanto, ran(A) = ran(A´) = 2 < nº de incógnitas $\rightarrow$ ***Sistema Compatible Indeterminado.***

Respondamos a las preguntas,

*a) Según lo estudiado al principio **el sistema es compatible determinado para $a \neq 0$**.*

b) Solución para $a = \mathbf{3}$

Si $a = \mathbf{3}$, $a \neq \mathbf{0}$, por lo que el sistema es compatible determinado

El sistema es $\begin{cases} \quad\quad y - z = -2 \\ -x \quad\quad + z = 5 \\ -3x + y - z = 1 \end{cases}$ *Como es un S.C.D. lo resolvemos por Cramer.*

De lo estudiado al principio, sabemos que /A/ = – a, por tanto (como a = 3) /A/ = – 3

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 5 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}}{-3} = \frac{-5+1+2+5}{-3} = \frac{3}{-3} = -1$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 0 & -2 & -1 \\ -1 & 5 & 1 \\ -3 & 1 & -1 \end{vmatrix}}{-3} = \frac{1+6-15+2}{-3} = \frac{-6}{-3} = 2$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 5 \\ -3 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{-3} = \frac{2-15+1}{-3} = \frac{-12}{-3} = 4$$

Para a = 3 la solución del sistema es: { x = – 1, y = 2, z = 4 }

*c) Según lo estudiado al principio **el sistema es compatible indeterminado para a = 0**.*

Del estudio realizado inicialmente, para resolver el sistema usaremos la 1ª y 2ª ecuación y como incógnitas principales x e y (las que determinan el menor de orden dos no nulo).

El sistema a resolver es:

$$\begin{cases} y = -1 + z \\ -x = 5 - z \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = -1 + z \\ x = -5 + z \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = -5 + z \\ y = -1 + z \end{cases}$$

*Finalmente, **para a = 0 las soluciones del sistema son:*** $\begin{cases} x = -5 + \lambda \\ y = 1 + \lambda \\ z = \lambda \end{cases} \quad \lambda \in \Re$