PROBLEMA A.2. Dados los puntos $A = (-1,2,\lambda)$, $B = (2,3,5)$ y $C = (3,5,3)$, donde λ es un parámetro real, se pide obtener **razonadamente**, **escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado**:

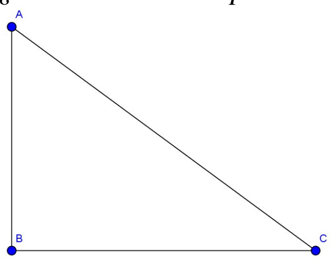
a) El valor del parámetro λ para que el segmento AC sea la hipotenusa de un triángulo rectángulo de vértices A, B y C. *(3 puntos)*

b) El área del triángulo de vértices A, B y C cuando $\lambda = 6$. *(4 puntos)*

c) La ecuación del plano que contiene al triángulo de vértices A, B y C cuando $\lambda = 6$. *(4 puntos)*

Solución:

a) ¿λ? / AC sea la hipotenusa del triángulo rectángulo ABC.



Si AC es la hipotenusa $\rightarrow \overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{BC} \rightarrow \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC} = 0$

$\overrightarrow{AB} = (3,1,5-\lambda)$, $\overrightarrow{BC} = (1,2,-2)$

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC} = (3,1,5-\lambda)\cdot(1,2,-2) = 3+2-2(5-\lambda) = 5-10+2\lambda = -5+2\lambda$$

$$-5+2\lambda = 0 \rightarrow 2\lambda = 5 \rightarrow \lambda = \frac{5}{2}$$

Solución: el segmento AC será la hipotenusa del triángulo rectángulo ABC para $\lambda = 5/2$.

b) ¿Área del triángulo ABC para $\lambda = 6$?(A(– 1,2,6), B(2,3,5) y C = (3,5,3))

Calculamos el área triángulo de vértices A, B y C mediante la fórmula:

$$Área = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{BC}\right|$$

$$\overrightarrow{AB} = (3,1,-1) \qquad y \qquad \overrightarrow{BC} = (1,2,-1)$$

$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{BC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -2 \end{vmatrix} = -2\vec{i}+6\vec{k}-\vec{j}-\vec{k}+2\vec{i}+6\vec{j} = 5\vec{j}+5\vec{k} = (0,5,5)$$

$$\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{BC}\right| = \sqrt{0^2+5^2+5^2} = 5\sqrt{2}$$

$$Área = \frac{1}{2}5\sqrt{2} = \frac{5\sqrt{2}}{2}\ u.a.$$

c) ¿Plano π que contiene los puntos A(– 1,2,6), B(2,3,5) y C = (3,5,3)?

$$\text{Del plano } \pi \text{ conocemos } \begin{cases} \text{punto } A(-1,2,6) \\ \text{vectores directores} \begin{cases} \overrightarrow{AB}(3,1,-1) \\ \overrightarrow{BC}(1,2,-2) \end{cases} \end{cases}$$

$$\text{La ecuación del plano } \pi \text{ será: } \begin{vmatrix} x+1 & y-2 & z-6 \\ 3 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -2 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow$$

$$(x+1)\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} - (y-2)\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} + (z-6)\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

$$(x+1)\,0-(y-2)\,(-5)+(z-6)\,5 = 0 \rightarrow 5y-10+5z-30 = 0 \rightarrow 5y+5z-40 = 0 \rightarrow y+z-8 = 0$$

Por tanto, $\boldsymbol{\pi: \ y + z - 8 = 0}$