PROBLEMA B.1. Sea A una matriz cuadrada tal que $A^2 + 2A = 3I$, donde I es la matriz identidad. Calcular **razonadamente**, **escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado**:

a) Los valores de a y b para los cuales $A^{-1} = aA + bI$. *(3 puntos)*
b) Los valores de α y β para los cuales $A^4 = \alpha A + \beta I$. *(4 puntos)*
c) El determinante de la matriz $2B^{-1}$, sabiendo que B es una matriz cuadrada de orden 3 cuyo determinantes es 2. *(3 puntos)*

Solución:

A es una matriz cuadrada / $A^2 + 2A = 3I$. *Comprobemos que existe* A^{-1}

$$A^2 + 2A = 3I \;\rightarrow\; A(A+I) = 3I \;\rightarrow\; A\left[\frac{1}{3}(A+I)\right] = I \;\rightarrow\; A^{-1} = \frac{1}{3}(A+I)$$

a) ¿a, b / $A^{-1} = aA + bI$?.

Partimos de $A^2 + 2A = 3I$.

multiplicamos por la derecha por A^{-1}, $A^2A^{-1} + 2AA^{-1} = 3IA^{-1} \;\rightarrow\; A(AA^{-1}) + 2AA^{-1} = 3IA^{-1}$

$$AI + 2I = 3A^{-1} \;\rightarrow\; A + 2I = 3A^{-1} \;\rightarrow\; A^{-1} = \frac{1}{3}A + \frac{2}{3}I$$

Por tanto, $a = \frac{1}{3}$ *y* $b = \frac{2}{3}$.

b) ¿α, β / $A4 = \alpha A + \beta I$?

Partimos de $A^2 + 2A = 3I \;\rightarrow\; A^2 = 3I - 2A$

$A^4 = A^2 \cdot A^2 = (3I - 2A)\cdot(3I - 2A) = 9II - 6IA - 6IA + 4A^2 = 9I - 6A - 6A + 4A^2 =$
$= 9I - 12A + 4A^2 = 9I - 12A + 4(3I - 2A) = 9I - 12A + 12I - 8A = -20A + 21\cdot I$

Por tanto, $\boldsymbol{\alpha = -20}$ ***y*** $\boldsymbol{\beta = 21}$.

c) $|2B^{-1}|$, *sabiendo que* B *es* $3x3$ *y* $|B| = 2$

Calculemos $\left|2B^{-1}\right|$

Considerando las propiedades de los determinantes:

$$\left|B^{-1}\right| = \frac{1}{|B|} \quad y \quad |n\,b| = n^3\,|B| \quad (por\ ser\ B\ \ 3x3)$$

$$\left|2B^{-1}\right| = 2^3\left|B^{-1}\right| = 8\,\frac{1}{|B|} = 8\,\frac{1}{2} = 4$$

Solución: $\boldsymbol{|2B^{-1}| = 4}$