PROBLEMA B.2. Dados el punto $A(5,7,3)$ y la recta $r: \dfrac{x-3}{-1} = \dfrac{y+1}{3} = \dfrac{z}{2}$, se pide obtener **razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado**:

a) La recta s que corta a la recta a r , pasa por el punto A, y es perpendicular a la recta r *(4 puntos)*

b) La distancia del punto A a la recta r. *(3 puntos)*

c) La distancia del punto $B(1,1,1)$ al plano π que pasa por $(3,-1,0)$ y es perpendicular a r. *(2 puntos)*

Solución:

a) ¿recta s? / s corta a r, $A \in s$ y $s \perp r$

s corta a r en el punto P_r, por tanto la recta s pasa por A y P_r

Como $s \perp r \;\rightarrow\; \overrightarrow{AP_r} \perp \overrightarrow{v_r}$, $\left(\overrightarrow{v_r} \text{ es el vector director de la recta } r \right)$

$A(5, 7, 3)$ *y* $P_r(3-\lambda, -1+3\lambda, 2\lambda) \;\rightarrow\; \overrightarrow{AP_r} = (-2-\lambda, -8+3\lambda, -3+2\lambda)$

$\overrightarrow{v_r} = (-1, 3, 2)$

$\overrightarrow{AP_r} \perp \overrightarrow{v_r} \;\rightarrow\; (-2-\lambda, -8+3\lambda, -3+2\lambda) \cdot (-1, 3, 2) = 0$

$2+\lambda-24+9\lambda-6+4\lambda = 0 \;\rightarrow\; -28+14\lambda = 0 \;\rightarrow\; 14\lambda = 28 \;\rightarrow\; \lambda = 2 \;\rightarrow$ $P_r(1, 5, 4)$

La recta s que pasa por A y P_r, $\overrightarrow{v_s} = \overrightarrow{AP_r} = (4,2,-1)$, *por tanto*

$$s: \frac{x-5}{4} = \frac{y-7}{2} = \frac{z-3}{-1}$$

b) ¿d(A , r)?

El cálculo de esta distancia es: $d(A,r) = \dfrac{\left|\overrightarrow{AP_r} \times \overrightarrow{v_r}\right|}{\left|\overrightarrow{v_r}\right|}$

$A(5,7,3)$

$P_r(3,-1,0)$

$\overrightarrow{AP_r}(-2,-8,-3)$

$\overrightarrow{v_r}(-1,3,2)$

$$\overrightarrow{AP_r} \times \overrightarrow{v_r} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -2 & -8 & -3 \\ -1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = \vec{i} \begin{vmatrix} -8 & -3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} - \vec{j} \begin{vmatrix} -2 & -3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} + \vec{k} \begin{vmatrix} -2 & -8 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} =$$

$$= \vec{i}\,(-16+9) - \vec{j}\,(-4-3) + \vec{k}\,(-6-8) = \vec{i}\,(-7) - \vec{j}\,(-7) + \vec{k}\,(-14) = -7\vec{i} + 7\vec{j} - 14\vec{k} = (-7, 7, -14)$$

$$\left|\overrightarrow{AP_r} \times \overrightarrow{v_r}\right| = \sqrt{(-7)^2 + 7^2 + (-14)^2} = 7\sqrt{6}$$

$$\left|\overrightarrow{v_r}\right| = \sqrt{(-1)^2 + 3^2 + 2^2} = \sqrt{14}$$

Finalmente, $d(A,r) = \dfrac{7\sqrt{6}}{\sqrt{14}} = \sqrt{21}\ u.$

c) ¿$d(B, \pi)$? / siendo: $B(1, 1, 1)$ y π un plano $\begin{cases} pasa\ por\ (3, -1, 0) \\ \perp r \end{cases}$

Ecuación del plano π:

Como $\pi \perp r \rightarrow \vec{n}_\pi = \vec{v}_r = (-1, 3, 2) \rightarrow \pi : -x + 3y + 2z + C = 0$

Como $(3, -1, 0) \in \pi \rightarrow -3 + 3 \cdot (-1) + 2 \cdot 0 + C = 0 \rightarrow -6 + C = 0 \rightarrow C = 6$

Por tanto, π: $-x + 3y + 2z + 6 = 0$

Finalmente, $d(B, \pi) = \dfrac{|-1 + 3 \cdot 1 + 2 \cdot 1 + 6|}{\sqrt{(-1)^2 + 3^2 + 2^2}} = \dfrac{10}{\sqrt{14}} = \dfrac{5\sqrt{14}}{7} \rightarrow d(B, \pi) = \dfrac{5\sqrt{14}}{7}$ u.