PROBLEMA A.1. Se dan la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ -2 & a+1 & 2 \\ -3 & a-1 & a \end{pmatrix}$, que depende del parámetro real a, y una matriz cuadrada B de orden 3 tal que $B^2 = \frac{1}{3}I - 2B$ siendo I la matriz identidad de orden 3. **Obtener razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado**:

a) El rango de la matriz A en función del parámetro a y el determinante de la matriz $2\,A^{-1}$ cuando $a = 1$. *(2 + 2 puntos)*

b) Todas las soluciones del sistema de ecuaciones $A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ cuando $a = -1$.
(3 puntos)

c) La comprobación de que B es invertible, encontrando m y n tales que $B^{-1} = m\,B + n\,I$.
(3 puntos)

Solución:

a) Rango de A.

A es 3x3, su máximo rango es 3.

Estudiamos su menor de orden 3,

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & a \\ -2 & a+1 & 2 \\ -3 & a-1 & a \end{vmatrix} = a(a+1) - 2(a-1)a + 3a(a+1) = a^2 + a - 2a^2 + 2a + 3a^2 + 3a - 2a + 2 =$$

$$= 2a^2 + 4a + 2$$

$$2a^2 + 4a + 2 = 0 \quad \rightarrow \quad a^2 + 2a + 1 = 0 \quad \rightarrow \quad a = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4.1.1}}{2.1} = \frac{-2}{2} = -1$$

Por lo tanto,

Si $a \neq -1$, $/A/ \neq 0 \rightarrow ran(A) = 3$

Si $a = -1$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & 0 & 2 \\ -3 & -2 & -1 \end{pmatrix}$

sabemos que $|A| = 0$, *como el menor* $\begin{vmatrix} -2 & 0 \\ -3 & -2 \end{vmatrix} = 4 \neq 0 \rightarrow ran(A) = 2$

Luego, ***si*** $\boldsymbol{a \neq -1}$, $\boldsymbol{ran(A) = 3}$ ***y si*** $\boldsymbol{a = -1}$, $\boldsymbol{ran(A) = 2}$.

Cuando $a = 1$, ¿ $|2\,A^{-1}|$?

Si $a = 1$ $(a \neq -1)$, *luego* $/A/ \neq 0 \rightarrow \exists\, A^{-1}$

Entonces, $|2\,A^{-1}| = (\text{como A es 3x3})\ 2^3\,|A^{-1}| = 8\,\frac{1}{|A|}$.

Para $a = 1$, $|A| = (2a^2 + 4a + 2)_{a=1} = 2.1^2 + 4.1 + 2 = 8$ *y, finalmente,* $|2\,A^{-1}| = 8\,\frac{1}{8} = 1$.

b) Para $a = -1$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & 0 & 2 \\ -3 & -2 & -1 \end{pmatrix}$

El sistema a resolver es: $A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & 0 & 2 \\ -3 & -2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} x - z = -1 \\ -2x + 2z = 2 \\ -3x - 2y - z = 0 \end{cases}$

La matriz ampliada de este sistema es $A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & -1 \\ -2 & 0 & 2 & 2 \\ -3 & -2 & -1 & 0 \end{array}\right)$

Por lo estudiado en el apartado a), sabemos que $|A| = 0$ *y que* $\begin{vmatrix} -2 & 0 \\ -3 & -2 \end{vmatrix} \neq 0 \rightarrow ran(A) = 2$

Calculemos el rango de A´,
al menor de A no nulo le añadimos la 4ª columna de A´ y 1ª fila de A´,

$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & 0 & 2 \\ -3 & -2 & 0 \end{vmatrix} = (F_2 = -2xF_1) = 0 \rightarrow ran(A') = 2$

Luego, ran(A) = ran(A´) = 2 < 3 = nº de incógnitas $\rightarrow$ *Sistema compatible indeterminado.*

Resolvemos el sistema utilizando las ecuaciones e incógnitas del menor de orden 2 no nulo,

$\begin{cases} -2x = 2 - 2z \\ -3x - 2y = z \end{cases}$ *De la 1ª ecuación,* $x = -1 + z$
Sustituyendo en la 2ª,

$-3(-1+z) - 2y = z; \quad -2y = z + 3(-1+z)$

$-2y = z - 3 + 3z$

$-2y = -3 + 4z$

$y = \dfrac{-3+4z}{-2} = \dfrac{3}{2} - 2z$

Por lo que la solución pedida será: $\begin{cases} x = -1 + \lambda \\ y = \dfrac{3}{2} - 2\lambda \\ z = \lambda \end{cases} \quad \lambda \in \Re$

c) Comprobar que B es invertible.
¿Existe una matriz B^{-1} *de manera que* $B^{-1} . B = I$*?*

Sabemos que $B^2 = \dfrac{1}{3}I - 2B \rightarrow 3B^2 = I - 6B \rightarrow 3B^2 + 6B = I \rightarrow (3B + 6I)B = I$

Por tanto, $B^{-1} = 3B + 6I$

Y además, m = 3 y n = 6