PROBLEMA A.2. Consideramos en el espacio las rectas $r:\begin{cases} x-y+3=0 \\ 2x-z+3=0 \end{cases}$ y $s: x=y+1=\dfrac{z-2}{2}$.

Obtener razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:

a) La ecuación del plano que contiene las rectas *r* y *s*. *(3 puntos)*
b) La recta que pasa por P = (0, – 1, 2) y corta perpendicularmente a la recta *r*. *(4 puntos)*
c) El valor que deben tener los parámetros reales a y b para que la recta s esté contenida en el plano π: x – 2 y + a z = b. *(3 puntos)*

Solución:

a) ¿Plano π? / r y s ⊂π.

Veamos la posición relativa de r y s.

Ecuación paramétrica de r, $r:\begin{cases} x-y+3=0 \\ 2x-z+3=0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y=3+x \\ z=-3+2x \end{cases} \rightarrow r:\begin{cases} x=\mu \\ y=3+\mu \\ z=-3+2\mu \end{cases} \quad \mu\in\Re$

Ecuación paramétrica de s, $s: x=y+1=\dfrac{z-2}{2} \rightarrow s:\begin{cases} x=\lambda \\ y=-1+\lambda \\ z=2+2\lambda \end{cases} \quad \lambda\in\Re$

Obtengamos los vectores directores de r y s.

$\vec{v}_r=(1,1,2)$ *y* $\vec{v}_s=(1,1,2)$, *por lo que* $\vec{v}_r=\vec{v}_s \rightarrow r\,//\,s$

El plano π *que contiene a r y s lo obtendremos a partir de* $\begin{cases} \text{punto } P_r(0,3,3) \\ v.\ directores \begin{cases} \vec{v}_r \\ \overrightarrow{P_rP_s} \end{cases} \end{cases}$

La ecuación del plano π,

$$\begin{vmatrix} x & y-3 & z-3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & -4 & -1 \end{vmatrix}=0 \rightarrow x\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -4 & -1 \end{vmatrix}-(y-3)\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}+(z-3)\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -4 \end{vmatrix}=0$$

$$7x+y-3-4z+12=0 \rightarrow 7x+y-4z+9=0$$

Por lo tanto, ***el plano que contiene a las rectas r y s es π: 7 x + y – 4 z + 9 = 0***

b) ¿Recta t? / P(0, – 1, 2) ∈ t y t corte ⊥ a r.

De lo calculado en el apartado anterior sabemos: punto genérico de r $P_r(\mu, 3+\mu, 3+2\mu)$ *y* $\vec{v}_r=(1,1,2)$

El corte entre r y t será el punto P_r *de manera que* $\overrightarrow{PP_r}\perp\vec{v}_r$.

$\overrightarrow{PP_r}=(\mu, 4+\mu, 1+2\mu)$

Como $\overrightarrow{PP_r}\perp\vec{v}_r \rightarrow \overrightarrow{PP_r}\cdot\vec{v}_r=0 \rightarrow (\mu, 4+\mu, 1+2\mu)\cdot(1,1,2)=0$

$$\mu+4+\mu+2+4\mu=0, \quad 6\mu+6=0, \quad 6\mu=-6, \quad \mu=-1$$

Luego el punto de corte entre t y r es (– 1 , 2 , 1)

Entonces, como la recta t buscada pasa por P(0, – 1, 2) y Q(– 1 , 2 , 1) $\rightarrow \vec{v}_t=(-1,3,-1)$

Finalmente, ***la ecuación de la recta pedida será:*** $t:\dfrac{x}{-1}=\dfrac{y+1}{3}=\dfrac{z-2}{-1}$

c) ¿a, b? / $s \subset \pi : x - 2y + az = b$

De lo calculado en el apartado a) tenemos la ecuación paramétrica de s,

$$s: \begin{cases} x = \lambda \\ y = -1 + \lambda \quad \lambda \in \Re \\ z = 2 + 2\lambda \end{cases}$$

Sustituyendo en la ecuación de π,

$\lambda - 2(-1 + \lambda) + a(2 + 2\lambda) = b$

$\lambda + 2 - 2\lambda + 2a + 2a\lambda = b$

$-\lambda + 2a\lambda = b - 2 - 2a$

$\lambda(-1 + 2a) = b - 2 - 2a$

Para que $s \subset \pi$, la ecuación debe dar $0 = 0$. Por lo que $\begin{cases} -1 + 2a = 0 \\ b - 2 - 2a = 0 \end{cases}$

De la 1ª ecuación $2a = 1 \quad \rightarrow \quad a = \frac{1}{2}$

Sustituyendo en la 2ª ecuación, $b - 2 - 2\frac{1}{2} = 0 \quad \rightarrow \quad b - 3 = 0 \quad \rightarrow \quad b = 3$

Por tanto, $s \subset \pi$ para $a = \frac{1}{2}$ ***y $b = 3$.***