PROBLEMA B.1. Se tiene el sistema de ecuaciones $\begin{cases} x+\ \ y+\ \ z=4 \\ 3x+4y+5z=5 \\ 7x+9y+11z=\alpha \end{cases}$, donde α es un parámetro real. **Obtener razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado**:

a) Los valores del parámetro α para los que el sistema es compatible y los valores de α para los que el sistema es incompatible. *(4 puntos)*

b) Todas las soluciones del sistema cuando sea compatible. *(4 puntos)*

c) La discusión de la compatibilidad y determinación del nuevo sistema deducido del anterior al cambiar el coeficiente 11 por cualquier otro número diferente. *(2 puntos)*

Solución:

En primer lugar estudiamos el sistema y después responderemos las preguntas.

La matriz ampliada de este sistema es: $A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 5 \\ 7 & 9 & 11 & \alpha \end{array}\right)$

A es una matriz 3x3, por tanto el máximo rango de A es 3.

A´ es una matriz 3x4, por tanto el máximo rango de A es 3.

Empezamos estudiando el rango de A

$$\left.\begin{array}{l} |1| = 1 \neq 0 \\ \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 4-3 = 1 \neq 0 \\ \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 5 \\ 7 & 9 & 11 \end{vmatrix} = \{Como\ F_3 = F_1 + 2F_2\} = 0 \end{array}\right\} \rightarrow \quad ran(A) = 2$$

Estudiemos el rango de A´. { Sabemos que ran (A´) ≥ ran (A) }

A partir del menor de orden 2 no nulo de A formamos el menor de orden 3 de A´,

$$\left.\begin{array}{l} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \\ 7 & 9 & \alpha \end{vmatrix} \underset{F_3-F_1-2F_2}{=} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & \alpha-14 \end{vmatrix} = (\alpha-14)\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = \alpha - 14 \\ \alpha - 14 = 0 \quad \rightarrow \quad \alpha = 14 \end{array}\right\} \begin{array}{l} Para \quad \alpha = 14,\ ran(A') = 2 \\ Para \quad \alpha \neq 14,\ ran(A') = 3 \end{array}$$

a) ***Si*** $\boldsymbol{\alpha = 14}$*, ran (A) = ran (A´) = 2 < 3 = nº de incognitas* $\rightarrow$ ***Sistema Compatible (indeterminado)***

Si $\boldsymbol{\alpha \neq 14}$*, ran (A) = 2 ≠ 3 =ran (A´)* $\rightarrow$ ***Sistema Incompatible***

b) El sistema es compatible para $\alpha = 14$ y, según lo estudiado inicialmente, el sistema a resolver es el correspondiente a las ecuaciones e incógnitas del menor de orden 2 no nulo. Es decir, el formado por la 1ª y 2ª ecuaciones y como incógnitas principales x e y.

$$\begin{cases} x + y = 4 - z \\ 3x + 4y = 5 - 5z \end{cases} \rightarrow \quad x = \frac{\begin{vmatrix} 4-z & 1 \\ 5-5z & 4 \end{vmatrix}}{1} = 16 - 4z - 5 + 5z = 11 + z$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 4-z \\ 3 & 5-5z \end{vmatrix}}{1} = 5 - 5z - 12 + 3z = -7 - 2z$$

La solución del sistema es: $\begin{cases} x = 11 + \lambda \\ y = -7 - 2\lambda \qquad \lambda \in \Re \\ z = \lambda \end{cases}$

c) Cambiamos el coeficiente 11 por otro número diferente. Lo llamamos r $(r \neq 11)$

La matriz ampliada de este nuevo sistema sería: $A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 5 \\ 7 & 9 & r & \alpha \end{array}\right)$

A es una matriz 3x3, por tanto el máximo rango de A es 3.
A´ es una matriz 3x4, por tanto el máximo rango de A es 3.

Empezamos estudiando el rango de A

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 5 \\ 7 & 9 & r \end{vmatrix} = \underset{F_3 - F_1 - 2F_2}{} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & r-11 \end{vmatrix} = (r-14)\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = r - 11$$

$$r - 11 = 0 \quad \rightarrow \quad r = 11$$

Como $r \neq 11 \ \rightarrow \ r - 11 \neq 0 \ \rightarrow$ /A/ $\neq 0$, por lo tanto ran (A) = 3.
Y como el máximo rango de A´ también es 3, obtenemos ran (A) = ran (A´) = 3 = nº de incógnitas
Por tanto, ***para $r \neq 11$ el sistema sería compatible y determinado****.*