PROBLEMA B.2. Sea π el plano de ecuación $9x + 12y + 20z = 180$.

Obtener razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:

a) Las ecuaciones de los dos planos paralelos a π que distan 4 unidades de π. *(4 puntos)*

b) Los puntos *A, B y C* intersección del plano π con los ejes OX, OY y OZ y el ángulo que forman los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$. *(4 puntos)*

c) El volumen del tetraedro cuyos vértices son el origen de coordenadas y los puntos *A, B y C*. *(2 puntos)*

Solución:

a) ¿Planos paralelos a π / d (plano , π) = 4?

Los planos paralelos a π tiene por ecuación: $\sigma: 9x + 12y + 20z + D = 0$

Como $\sigma \,//\, \pi \;\rightarrow\; d(\pi, \sigma) = d(P_\pi, \sigma)$

Obtengamos un punto del plano π, para $x = 0$ *e* $y = 0 \;\rightarrow\; 20z = 180 \;\rightarrow\; z = 9 \;\rightarrow\; P_\pi = (0, 0, 9)$

$$d(P_\pi, \sigma) = \frac{|9 \cdot 0 + 12 \cdot 0 + 20 \cdot 9 + D|}{\sqrt{9^2 + 12^2 + 20^2}} = \frac{|180 + D|}{25}$$

Debe ser $$\frac{|180 + D|}{25} = 4 \;\rightarrow\; |180 + D| = 100 \quad \begin{cases} 180 + D = 100 \;\rightarrow\; D = -80 \\ 180 + D = -100 \;\rightarrow\; D = -280 \end{cases}$$

Los planos pedidos serán: $\boldsymbol{\sigma_1: 9x + 12y + 20z - 80 = 0}$ ***y*** $\boldsymbol{\sigma_2: 9x + 12y + 20z - 280 = 0}$

b) $A = \pi \cap$ *eje OX*

Calculemos la ecuación del eje OX, punto (0 , 0, 0) y vector director (1 , 0 , 0)

$$\text{eje } OX: \begin{cases} x = \lambda \\ y = 0 \quad \lambda \in \Re \\ z = 0 \end{cases}$$

Luego ***A (20 , 0 , 0)***

$$\pi \cap \text{eje } OX \;\equiv\; 9\lambda + 12 \cdot 0 + 20 \cdot 0 = 180 \;\rightarrow\; 9\lambda = 180 \;\rightarrow\; \lambda = 20$$

$B = \pi \cap$ *eje OY*

Calculemos la ecuación del eje OY, punto (0 , 0, 0) y vector director (0 , 1 , 0)

$$\text{eje } OY: \begin{cases} x = 0 \\ y = \lambda \quad \lambda \in \Re \\ z = 0 \end{cases}$$

Luego ***B (0 , 15 , 0)***

$$\pi \cap \text{eje } OY \;\equiv\; 9 \cdot 0 + 12\lambda + 20 \cdot 0 = 180 \;\rightarrow\; 12\lambda = 180 \;\rightarrow\; \lambda = 15$$

$C = \pi \cap$ *eje OZ*

Calculemos la ecuación del eje OZ, punto (0 , 0, 0) y vector director (0 , 0 , 1)

$$\text{eje } OZ: \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \quad \lambda \in \Re \\ z = \lambda \end{cases}$$

Luego ***C (0 , 0 , 9)***

$$\pi \cap \text{eje } OZ \;\equiv\; 9 \cdot 0 + 12 \cdot 0 + 20\lambda = 180 \;\rightarrow\; 20\lambda = 180 \;\rightarrow\; \lambda = 9$$

Calculemos los vectores: $\overrightarrow{AB} = (-20, 15, 0)$ *y* $\overrightarrow{AC} = (-20, 0, 9)$. *Si* $\alpha = \left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right)$

$$\cos\alpha = \frac{|(-20, 15, 0) \cdot (-20, 0, 9)|}{\sqrt{(-20)^2 + 15^2 + 0^2}\,\sqrt{(-20)^2 + 0^2 + 9^2}} = \frac{|400|}{25\sqrt{481}} = \frac{400}{25\sqrt{481}} = 0'7295$$

y $\boldsymbol{\alpha = 43'1524^o = 43^o\ 9'\ 8'' = 0'75315 \text{ rds.}}$

c) Volumen del tetraedro de vértices O, A, B y C.

Calculemos los vectores: $\overrightarrow{OA}=(20,0,0)$ $\quad \overrightarrow{OB}=(0,15,0)$ $\quad \overrightarrow{OC}=(0,0,9)$

Entonces el cálculo del volumen del tetraedro es:

$$V=\frac{1}{6}\begin{vmatrix} 20 & 0 & 0 \\ 0 & 15 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{vmatrix}=\frac{1}{6}2700=450\ u.v.$$

Por tanto, ***el volumen del tetraedro pedido es 450 u.v.***