Problema 1. Dado el sistema de ecuaciones $\begin{cases} x+\ \ y+(a+1)\ z=2 \\ x+(a-1)\ y+2z=1 \\ 2\ x+ay+z=-1 \end{cases}$

a) Estudiadlo en función de los valores del parámetro real a. *(5 puntos)*
b) Encontrad todas las soluciones del sistema cuando éste sea compatible. *(5 puntos)*

Solución:
a)

La matriz ampliada de este sistema es: $A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a+1 & 2 \\ 1 & a-1 & 2 & 1 \\ 2 & a & 1 & -1 \end{array}\right)$

A es una matriz 3x3, por tanto el máximo rango de A es 3.
A´ es una matriz 3x4, por tanto el máximo rango de A´ es 3.
Empezamos estudiando el rango de A

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & a+1 \\ 1 & a-1 & 2 \\ 2 & a & -1 \end{vmatrix} = a-1+a(a-1)+4-(a+1)(a-1)2-2a-1 = a-1+a^2+a+4-2(a^2-1)-2a-1 =$$

$$= a^2+2-2a^2+2 = 4-a^2$$

$$4-a^2=0 \quad \rightarrow \quad a^2=4 \quad \rightarrow \quad a=\pm\sqrt{4}=\pm 2$$

Soluciones: $a=-2$ *y* $a=2$

Para a ≠ – 2 y 2

$|A| \neq 0 \rightarrow$ *ran(A) = 3, y como el máximo rango de A´ es 3* $\rightarrow$ *ran(A) = ran(A´) = 3 = nº incógnitas, por lo que* ***el sistema es compatible y determinado****.*

Para a = – 2

$$A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & -3 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

Sabemos que $|A| = 0$*, estudiemos los rangos de A y A´,*

En A, $\left.\begin{array}{l} |1| = 1 \neq 0 \\ \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = -3-1 = -4 \neq 0 \end{array}\right\} \rightarrow ran(A)=2 \quad y \quad ran(A') \geq 2$

En A´, a partir del menor de orden dos no nulo anterior formamos:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -3 & 1 \\ 2 & -2 & -1 \end{vmatrix} = 3-4+2+12+4+1 = 18 \neq 0 \quad \rightarrow \quad ran(A') = 3$$

Por lo tanto, ran(A) ≠ ran(A´), luego ***el sistema es incompatible****.*

Para a = 2

$$A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

Sabemos que $|A| = 0$, *estudiemos los rangos de A y A´,*

En A, $\left.\begin{array}{l} |1| = 1 \neq 0 \\ \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 - 3 = -1 \neq 0 \end{array}\right\} \to ran(A) = 2 \quad y \quad ran(A') \geq 2$

En A, $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ *las tres filas son iguales y* $|1| = 1 \neq 0 \ \to \ ran(A) = 1$

En A´, a partir del menor de orden dos no nulo anterior formamos:

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \{como\ C_3 = C_2 - C_1\} = 0 \quad \to \quad ran(A') = 2$$

Luego, ran(A) = ran(A´) = 2 < nº incógnitas, luego ***el sistema es compatible determinado****.*

Por tanto,

Si a ≠ – 2 y 2, Sistema Compatible Determinado
Si a = – 2, Sistema Incompatible
Si a = 2, Sistema Compatible Indeterminado

b) ¿Soluciones del sistema cuando sea compatible?

Si a ≠ – 2 y 2, Sistema Compatible Determinado

Lo resolvemos por Cramer,

Sabemos que la matriz ampliada de este sistema es: $A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a+1 & 2 \\ 1 & a-1 & 2 & 1 \\ 2 & a & 1 & -1 \end{array}\right)$ *y* $|A| = 4 - a^2$.

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & a+1 \\ 1 & a-1 & 2 \\ -1 & a & 1 \end{vmatrix}}{4-a^2} = \frac{2(a-1) + a(a+1) - 2 + (a-1)(a+1) - 4a - 1}{4-a^2} = \frac{2a - 2 + a^2 + a - 2 + a^2 - 1 - 4a - 1}{4-a^2} =$$

$$= \frac{2a^2 - a - 6}{4-a^2} = \frac{(a-2)(2a+3)}{-(a-2)(a+2)} = \frac{-(2a+3)}{a+2}$$

Factorizando el numerador, $\begin{array}{c|ccc} & 2 & -1 & -6 \\ 2 & & 4 & 6 \\ \hline & 2 & 3 & 0 \end{array} \ \to \ 2a^2 - a - 6 = (a-2)(2a+3)$

y el denominador, $4 - a^2 = -(a^2 - 4) = -(a-2)(a+2)$

$$y=\frac{\begin{vmatrix}1 & 2 & a+1\\ 1 & 1 & 2\\ 2 & -1 & 1\end{vmatrix}}{4-a^2}=\frac{1-(a+1)+8-2(a+1)+2-2}{4-a^2}=\frac{9-3(a+1)}{4-a^2}=\frac{9-3a-3}{4-a^2}=\frac{6-3a}{4-a^2}=\frac{3(2-a)}{4-a^2}=\frac{3(a-2)}{a^2-4}=$$

$$=\frac{3(a-2)}{(a-2)(a+2)}=\frac{3}{a+2}$$

$$z=\frac{\begin{vmatrix}1 & 2 & a+1\\ 1 & 1 & 2\\ 2 & -1 & 1\end{vmatrix}}{4-a^2}=\frac{-a+1+2a+2-4(a-1)-a+1}{4-a^2}=\frac{4-4a+4}{4-a^2}=\frac{8-4a}{4-a^2}=\frac{4a-8}{a^2-4}=\frac{4(a-2)}{(a-2)(a+2)}=\frac{4}{a+2}$$

{La simplificación efectuada en el cálculo de x, y, z se puede realizar porque $a \neq 2 \rightarrow a-2 \neq 0$}

Si $a \neq -2$ y 2, la solución es: $x=\dfrac{-(2a+3)}{a+2}$, $y=\dfrac{3}{a+2}$, $z=\dfrac{4}{a+2}$.

Si a = 2, Sistema Compatible Indeterminado

Del estudio realizado en el apartado a), el menor no nulo de orden 2 calculado nos indica las ecuaciones e incógnitas principales; en este caso 1ª y 2ª ecuaciones e y, z como incógnitas.

El sistema a resolver es: $\begin{cases} y+3z=2-x \\ y+z=1-x \end{cases}$ y $\begin{vmatrix}1 & 3\\ 1 & 1\end{vmatrix}=-1$

$$y=\frac{\begin{vmatrix}2-x & 3\\ 1-x & 2\end{vmatrix}}{-1}=\frac{4-2x-3+3x}{-1}=\frac{1+x}{-1}=-1-x$$

$$z=\frac{\begin{vmatrix}1 & 2-x\\ 1 & 1-x\end{vmatrix}}{-1}=\frac{1-x-2+x}{-1}=\frac{-1}{-1}=1$$

$$Solución: \begin{cases} x=\lambda \\ y=-1-\lambda \qquad \lambda\in\Re \\ z=1 \end{cases}$$