Problema 2. Sea dan los planos π_1: $x + y + z = a - 1$, π_2: $2x + y + az = a$ y π_3: $x + ay + z = 1$.

a) Determinad la posición relativa de los tres planos en función del parámetro a. *(4 puntos)*

b) Para $a = 1$, calculad, si existe, la recta de corte entre los planos π_1 y π_3. *(3 puntos)*

c) Para $a = 2$, calculad, si existe, la recta de corte entre los planos π_1 y π_2. *(3 puntos)*

Solución:

a) Estudiemos el sistema formado por las ecuaciones de los tres planos.

La matriz ampliada de este sistema es: $A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & a-1 \\ 2 & 1 & a & a \\ 1 & a & 1 & 1 \end{array}\right)$

A es una matriz 3x3, por tanto el máximo rango de A es 3.
A´ es una matriz 3x4, por tanto el máximo rango de A´ es 3.
Empezamos estudiando el rango de A

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & a \\ 1 & a & 1 \end{vmatrix} = 1 + 2a + a - 1 - a^2 - 2 = -a^2 + 3a - 2$$

Resolvemos la ecuación: $-a^2 + 3a - 2 = 0$

$$\begin{array}{c|ccc} & -1 & 3 & -2 \\ 1 & & -1 & 2 \\ \hline & -1 & 2 & \boxed{0} \\ 2 & & -2 & \\ \hline & -1 & \boxed{0} & \end{array}$$

Soluciones: $a = 1$ *y* $a = 2$

Si $a \neq 1$ *y* 2 $\rightarrow$ *el sistema es compatible y determinado, por lo que los tres planos se cortan en un punto.*

Si $a = 1$,

$$A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Sabemos que $|A| = 0$, *estudiemos los rangos de A y A´,*

En A, $\left.\begin{array}{l} |1| = 1 \neq 0 \\ \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 2 - 1 = 1 \neq 0 \end{array}\right\} \rightarrow ran(A) = 2 \quad y \quad ran(A') \geq 2$

En A´, a partir del menor de orden dos no nulo anterior formamos:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 1 - 1 - 2 = -1 \neq 0 \quad \rightarrow \quad ran(A') = 3$$

Por lo tanto, ran(A) ≠ ran(A´), luego el sistema es incompatible; por tanto los tres planos no se cortan en un elemento común.

Como π_1: $x + y + z = 0$ *y* π_3: $x + y + z = 1$, *estos planos son paralelos {coeficientes de incógnitas iguales y términos independientes distintos}. El menor de orden 2 no nulo de A nos indica que* π_2 *corta a* π_1 *y* π_3.

Si $a = 2$,

$$A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Sabemos que $/A/ = 0$*, estudiemos los rangos de A y A´,*

En A, $\left.\begin{array}{l} |1| = 1 \neq 0 \\ \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 2 - 1 = 1 \neq 0 \end{array}\right\} \rightarrow ran(A) = 2 \quad y \quad ran(A') \geq 2$

En A´, a partir del menor de orden dos no nulo anterior formamos:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \{C_1 = C_3\} = 0 \quad \rightarrow \quad ran(A') = 2$$

Por lo tanto, ran(A) = ran(A´) = 2, luego el sistema es compatible indeterminado (resolvemos dos incógnitas en función de otra); por tanto los tres planos se cortan en una recta.

Resumiendo,

Si $\boldsymbol{a \neq 1}$ ***y 2, los tres planos se cortan en un punto.***
Si a = 2, los tres planos se cortan en una recta
Si a = 1, los tres planos no se cortan en un elemento común. $\boldsymbol{\pi_1}$ ***y*** $\boldsymbol{\pi_3}$ ***son paralelos y*** $\boldsymbol{\pi_2}$ ***corta a ambos.***

b) Si a = 1, ¿corte entre π_1 y π_3*?*

π_1*:* $x + y + z = 0$ *y* π_3*:* $x + y + z = 1$*.*

Como los coeficientes de x, y, z son iguales y los términos independientes distintos, los dos planos son paralelos.

Luego, ***si a = 1 no hay recta de corte entre*** $\boldsymbol{\pi_1}$ **y** $\boldsymbol{\pi_3}$*.*

c) Si a = 2, ¿corte entre π_1 y π_2*?*

π_1*:* $x + y + z = 1$ *y* π_3*:* $2x + y + 2z = 2$*.*

El sistema a resolver es: $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ 2x + y + 2z = 2 \end{cases}$ *y* $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$ *{calculado en apartado a) }*

Por tanto el sistema tiene solución. El sistema a resolver es:

$$\begin{cases} x + y = 1 - z \\ 2x + y = 2 - 2z \end{cases}$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 - z & 1 \\ 2 - 2z & 1 \end{vmatrix}}{-1} = \frac{1 - z - 2 + 2z}{-1} = \frac{-1 + z}{-1} = 1 - z$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 - z \\ 2 & 2 - 2z \end{vmatrix}}{-1} = \frac{2 - 2z - 2 + 2z}{-1} = \frac{0}{-1} = 0$$

$$Solución: \begin{cases} x = 1 - \lambda \\ y = 0 \\ z = \lambda \end{cases} \qquad \lambda \in \Re$$

Por tanto, ***si a = 2 los planos*** $\boldsymbol{\pi_1}$ **y** $\boldsymbol{\pi_2}$ ***se cortan en la recta:*** $\begin{cases} x = 1 - \lambda \\ y = 0 \\ z = \lambda \end{cases} \qquad \lambda \in \Re$