Problema 4. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & m \\ 0 & m & 0 \\ 2 & 1 & m^2+1 \end{pmatrix}$, se pide:

a) Obtened el rango de la matriz en función del parámetro *m*. *(4 puntos)*
b) Explicad cuando la matriz *A* es invertible. *(2 puntos)*
c) Resolved la ecuación $X\,A = I$ donde I es la matriz identidad en el caso $m = 1$. *(4 puntos)*

Solución:

a) ¿ran(A) en función de m?

Estudiemos /A/,

$$|A| = \begin{vmatrix} -1 & 2 & m \\ 0 & m & 0 \\ 2 & 1 & m^2+1 \end{vmatrix} = -m(m^2+1) - 2m^2 = -m^3 - m = -m^3 - 2m^2 - m = -m(m^2+2m+1) =$$

$$= -m\,(m+1)^2$$

$$-m\,(m+1)^2 = 0 \begin{cases} -m = 0 \quad \rightarrow \quad m = 0 \\ (m+1)^2 = 0 \quad \rightarrow \quad m+1 = 0 \quad \rightarrow \quad m = -1 \end{cases}$$

Por tanto,

Si $m \neq -1$ *y* $0 \;\rightarrow\; |A| \neq 0 \;\rightarrow\; ran(A) = 3$

Si $m = -1$,

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{l} \text{sabemos que } |A| = 0 \\ \text{como } \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \quad \rightarrow \quad ran(A) = 2 \end{array}$$

Si $m = 0$,

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{l} \text{sabemos que } |A| = 0 \\ \text{como } \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -1 - 4 = -5 \neq 0 \quad \rightarrow \quad ran(A) = 2 \end{array}$$

Finalmente,

Si $\boldsymbol{m \neq -1}$ ***y 0,*** $\boldsymbol{ran(A) = 3}$

Si $\boldsymbol{m = -1}$ ***o*** $\boldsymbol{m = 0}$, $\boldsymbol{ran(A) = 2}$

b) La matriz A, una matriz cuadrada, será invertible cuando su determinante sea distinto de 0.

Luego, ***A es invertible para*** $\boldsymbol{m \neq -1}$ ***y 0*** *c) Para $m = 1$, resolved $X A = I$.*

Si $m = 1$ $\{m \neq -1 \text{ y } 0\}$, por tanto A es invertible.

Conociendo A^{-1}, la solución de la ecuación $X A = I$ será:

Partimos de la ecuación a resolver: $X A = I$

Multiplicamos por A^{-1} por la derecha: $X A A^{-1} = I A^{-1}$

Como $A A^{-1} = I$, queda: $X = A^{-1}$

$$Si\ m = 1, \quad A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$Sabemos\ que \quad |A| = -m\,(m+1)^2 \quad \to \quad |A|_{m=1} = \left[-m\,(m+1)^2\right]_{m=1} = -1\,(1+1)^2 = -4$$

Calculemos A^{-1},

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{menores} \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 3 & -4 & -5 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{adjuntos} \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ -3 & -4 & 5 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{traspuesta} \begin{pmatrix} 2 & -3 & -1 \\ 0 & -4 & 0 \\ -2 & 5 & -1 \end{pmatrix}$$

$$Finalmente, \quad A^{-1} = \frac{1}{-4}\begin{pmatrix} 2 & -3 & -1 \\ 0 & -4 & 0 \\ -2 & 5 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/2 & 3/4 & 1/4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/2 & -5/4 & 1/4 \end{pmatrix}$$

Solución: $$X = \begin{pmatrix} -1/2 & 3/4 & 1/4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/2 & -5/4 & 1/4 \end{pmatrix}$$