

**Problema 5.** Dados el punto  $P(1, 2, 3)$  y el plano  $\pi: 3x + 2y + z + 4 = 0$ , se pide:

- Calculad la distancia del punto  $P$  al plano  $\pi$ . (2 puntos)
- Calculad el punto  $P'$  que es el simétrico del punto  $P$  respecto del plano  $\pi$ . (5 puntos)
- La ecuación del plano  $\pi'$  que pasa por  $P$  y es paralelo a  $\pi$ . (3 puntos)

*Solución:*

a) ¿ $d(P, \pi)$ ?

$$d(P, \pi) = \frac{|3 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 3 + 4|}{\sqrt{3^2 + 2^2 + 1^2}} = \frac{14}{\sqrt{14}} = \sqrt{14}$$

**Solución:**  $d(P, \pi) = \sqrt{14}$  u.l.

b) ¿ $P'$ ? /  $P'$  es el simétrico de  $P$  respecto de  $\pi$ .

1º) Recta,  $r$ , que pasa por  $P$  y es perpendicular a  $\pi$

De la recta  $r$  conocemos:  $\left\{ \begin{array}{l} \text{punto } P(1,2,3) \\ \text{v. director, } r \perp \pi \rightarrow \vec{v}_r = \vec{n}_\pi(3,2,1) \end{array} \right.$

Las ecuaciones paramétricas de  $r$ ,  $r: \begin{cases} x = 1 + 3\lambda \\ y = 2 + 2\lambda \\ z = 3 + \lambda \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R}$

2º) Punto de corte entre  $r$  y  $\pi$  ( $M$ ).

Sustituyendo los valores de  $x, y, z$  de la recta en la ecuación del plano:

$$3(1 + 3\lambda) + 2(2 + 2\lambda) + 3 + \lambda + 4 = 0$$

$$3 + 9\lambda + 4 + 4\lambda + 3 + \lambda + 4 = 0$$

$$14\lambda + 14 = 0 \rightarrow 14\lambda = -14 \rightarrow \lambda = \frac{-14}{14} = -1$$

Sustituyendo este valor en la ecuación de la recta:  $\begin{cases} x = 1 + 3(-1) = -2 \\ y = 2 + 2(-1) = 0 \\ z = 3 - 1 = 2 \end{cases}$

Entonces  $M(-2, 0, 2)$ .

3º) El cálculo de  $P'$  podemos realizarlo de dos formas.

a)  $P'$  será tal que  $\frac{P + P'}{2} = M$

$$P + P' = 2M \rightarrow P' = 2M - P = 2(-2, 0, 2) - (1, 2, 3) = (-4, 0, 4) - (1, 2, 3) = (-5, -2, 1)$$

b) ¿ $Q \in r$ ? /  $d(Q, \pi) = \sqrt{14}$

$$d(Q, \pi) = \sqrt{14} \rightarrow \frac{|3(1 + 3\lambda) + 2(2 + 2\lambda) + 3 + \lambda + 4|}{\sqrt{14}} = \sqrt{14}$$

$$|3(1 + 3\lambda) + 2(2 + 2\lambda) + 3 + \lambda + 4| = 14; \quad |3 + 9\lambda + 4 + 4\lambda + 3 + \lambda + 4| = 14$$

$$|14\lambda + 14| = 14; \quad \begin{cases} 14\lambda + 14 = 14; & 14\lambda = 0; & \lambda = 0; & Q(1, 2, 3) = P \\ 14\lambda + 14 = -14; & 14\lambda = -28; & \lambda = -2; & Q(-5, -2, 1) = P' \end{cases}$$

**Solución:**  $P'(-5, -2, 1)$ .

c) ¿ $\pi'$ ? /  $P' \in \pi'$  y  $\pi' // \pi$

$$\text{Como } \pi' // \pi \rightarrow \pi': 3x + 2y + z + D = 0$$

$$\text{Como } P' \in \pi' \rightarrow 3(-5) + 2(-2) + 1 + D = 0$$

$$-15 - 4 + 1 + D = 0; \quad -18 + D = 0; \quad D = 18$$

**Solución,  $\pi': 3x + 2y + z + 18 = 0$**