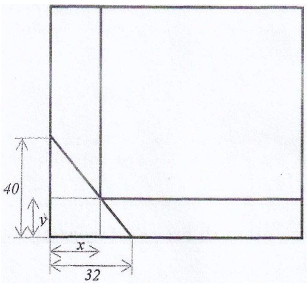
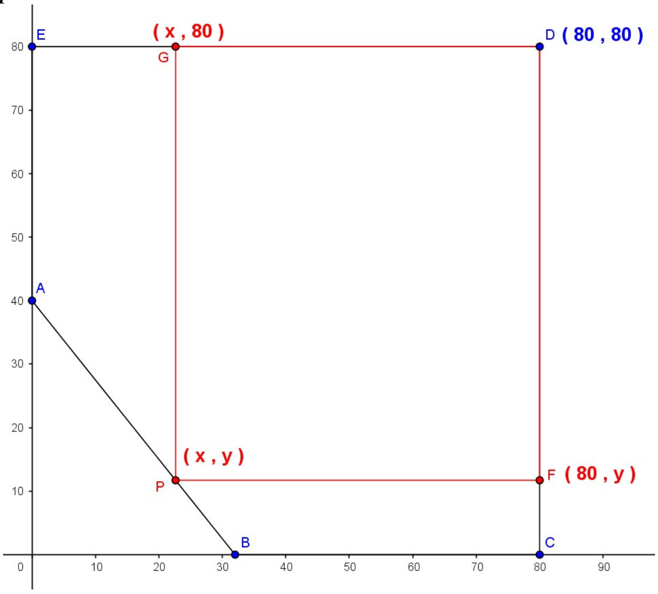
Problema 6. Un espejo plano, cuadrado, de 80 cm de lado, se ha roto por una esquina siguiendo una línea recta. El trozo desprendido tiene forma de triángulo rectángulo de catetos 32 cm y 40 cm respectivamente. En el espejo roto recortamos una pieza rectángulo R, uno de cuyos vértices es el punto (x, y) (véase la figura).

a) Hallad el área de la pieza rectangular obtenida como función de x, cuando $0 \le x \le 32$. *(4 puntos)*
b) Calculad las dimensiones que tendrá R para que su área sea máxima. *(4 puntos)*
c) Calculad el valor de dicha área máxima. *(2 puntos)*



Solución:
La representación gráfica del problema es:



a) Área del rectángulo R de vértices $PFDG$

El lado PF mide $(80 - x)$ cm, el lado PG mide $(80 - y)$ cm. El área del rectángulo R quedaría en función de x e y. Para expresar el área de R en función de x, consideramos que el punto $P(x, y) \in \overline{AB}$.

Calculamos la ecuación de la recta que pasa por A y B para expresar y en función de x.

$$\begin{cases} A = (0,40) \\ B = (32,0) \end{cases} \to r: \begin{cases} Punto\ (0,40) \\ v.\ director\ (32,-40) \approx (4,-5) \end{cases}$$

$$luego\ r: \frac{x-0}{4} = \frac{y-40}{-5} \to -5x = 4y - 160 \to \quad 4y = -5x + 160 \to \quad y = \frac{-5x+160}{4} = \frac{-5}{4}x + 40$$

El área de rectángulo R será:

$$A_R = (80-x)(80-y) = (80-x)\left(40+\frac{5}{4}x\right)$$

$$80 - y = 80 - \left(\frac{-5}{4}x + 40\right) = 80 + \frac{5}{4}x - 40 = 40 + \frac{5}{4}x$$

Solución: $A_R = (80-x)\left(40+\frac{5}{4}x\right) cm^2 \quad 0 \le x \le 32$

b) Valor de x / A_R es máxima.

$$A_R = (80 - x)\left(40 + \frac{5}{4}x\right) \quad 0 \le x \le 32$$

$$A_R' = -\left(40 + \frac{5}{4}x\right) + (80 - x)\frac{5}{4} = -40 - \frac{5}{4}x + 100 - \frac{5}{4}x = 60 - \frac{5}{2}x$$

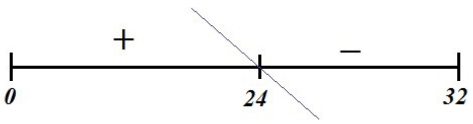
$$60 - \frac{5}{2}x = 0; \quad 120 - 5x = 0; \quad 120 = 5x; \quad x = \frac{120}{5} = 24 \in (0{,}32)$$

$$A_R'' = -\frac{5}{2}$$

$$\text{Para } x = 24,\ A_R'' = -\frac{5}{2} < 0 \quad \rightarrow \quad \text{en } x = 24\ A_R \text{ tiene un máximo relativo}$$

Estudiemos el signo de A_R' a la izquierda y derecha de 24.

Como A_R' es una recta de pendiente negativa cuya raíz es 24:



Luego en x = 24 A_R tiene un máximo relativo que es el absoluto en [0 , 32] ya que a la izquierda de 24 A_R es creciente y a la derecha es decreciente.

Las dimensiones de R son:

$$80 - x = 80 - 24 = 56 \quad y \quad 40 + \frac{5}{4}x = 40 + \frac{5}{4}\cdot 24 == 70$$

Solución: las dimensiones que tendrá R para que su área sea máxima son 56 cm x 70 cm.

c) El área máxima será, A_R = 56 . 70 =3920

Solución: el área máxima del rectángulo R mide 3920 cm^2.

(Este ejercicio es similar al B3 de Junio de 2014)