Problema 1. Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ y $C=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Se pide

a) Demostrar que $C - A\,B^T$ tiene inversa y calcularla. *(4 puntos)*
b) Calcular la matriz X que verifica $C\,X = A\,B^T X + I$, donde I es la matriz identidad. *(3 puntos)*
c) Justificar que $(A\,B^T)^n = 2^n\, I$ para todo número natural n. *(3 puntos)*

Solución:
a) Cálculo de $C - A\,B^T$

$$B=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow B^T=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A\,B^T=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$C - A\,B^T=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$$

Calculemos el determinante de $C - A\,B^T$

$$\left|C - A\,B^T\right| = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -3 \end{vmatrix} = 3 \neq 0 \rightarrow \exists \left(C - A\,B^T\right)^{-1}$$

Calculemos la inversa de $C - A\,B^T$

$$C - A\,B^T=\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{menores} \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{adjuntos} \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{traspuesta} \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Finalmente, $\left(C - A\,B^T\right)^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -3 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1/3 \\ 0 & -1/3 \end{pmatrix}$

Por tanto $\boldsymbol{C - A\,B^T}$ ***tiene inversa y es*** $\begin{pmatrix} -1 & -1/3 \\ 0 & -1/3 \end{pmatrix}$

b) Matriz X? / $C\,X = A\,B^T X + I$

$C\,X = A\,B^T X + I \rightarrow C\,X - A\,B^T X = I \rightarrow (C - A\,B^T)\,X = I$, *por tanto* $X = (C - A\,B^T)^{-1}$

Luego, $\boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} -1 & -1/3 \\ 0 & -1/3 \end{pmatrix}$

c) Justificar que $(A B^T)^n = 2^n I$ para todo número natural n.

En el apartado a) hemos obtenido que $A B^T = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 2 I \quad \rightarrow \quad \left(A B^T\right)^1 = 2^1 I.$

Calculemos $\left(A B^T\right)^2$

$$\left(A B^T\right)^2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = 2 I\ 2 I = 4\, I^2 = 2^2\ I\ ,\quad \textit{se cumple para } n = 2.$$

Supongamos que se cumple $\left(A B^T\right)^n = 2^n\ I$ *, comprobemos que también se cumple para n+1.*

$\left(A B^T\right)^{n+1} = \left(A B^T\right)^n \left(A B^T\right) = 2^n\ I\ 2\ I = 2^{n+1}\ I^2 = 2^{n+1}\ I$ *, que es lo que queríamos comprobar.*

Por inducción hemos comprobado que: ***$(A B^T)^n = 2^n I$ para todo número natural n.***