Problema 2. Dada la matriz $A=\begin{pmatrix} m & 0 & m-1 \\ -2m & m^2 & 1 \\ 0 & 2m & 1 \end{pmatrix}$. Determinar:

a) El rango de la matriz A en función del parámetro real m. *(4 puntos)*
b) La matriz inversa de A en el caso $m=2$. *(4 puntos)*
c) El número real m para el cual el determinante de la matriz $2A$ es igual a -8. *(2 puntos)*

Solución:

a) ¿ran(A) en función de m?

Estudiemos /A/,

$$|A|=\begin{vmatrix} m & 0 & m-1 \\ -2m & m^2 & 1 \\ 0 & 2m & 1 \end{vmatrix}=m^3-4m^2(m-1)-2m^2=m^3-4m^3+4m^2-2m^2=-3m^3+2m^2=m^2(2-3m)$$

$$m^2(2-3m)=0 \left\langle \begin{array}{l} m^2=0 \quad\rightarrow\quad m=0 \\ 2-3m=0 \quad\rightarrow\quad 2=3m \quad\rightarrow\quad m=\frac{2}{3} \end{array} \right.$$

Por tanto,

Si $m\neq 0$ *y* $\frac{2}{3}$ $\rightarrow$ $/A/\neq 0$ $\rightarrow$ *ran(A) = 3*

Si $m=\frac{2}{3}$,

$$A=\begin{pmatrix} \frac{2}{3} & 0 & \frac{2}{3}-1 \\ -2\frac{2}{3} & \left(\frac{2}{3}\right)^2 & 1 \\ 0 & 2\frac{2}{3} & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{2}{3} & 0 & \frac{-1}{3} \\ \frac{-4}{3} & \frac{4}{9} & 1 \\ 0 & \frac{4}{3} & 1 \end{pmatrix}$$

sabemos que $|A|=0$

como $\begin{vmatrix} 2/3 & 0 \\ -4/3 & 4/9 \end{vmatrix}=\frac{2}{3}\frac{4}{9}=\frac{8}{27}\neq 0 \quad\rightarrow\quad ran(A)=2$

Si m = 0,

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

sabemos que $|A|=0$

Cualquier menor de orden 2 de esta matriz contiene una columna de ceros por lo que los menores de orden dos son nulos.

Como, por ejemplo, $|-1|=-1\neq 0$ $\rightarrow$ *ran(A) = 1*

Finalmente,

Si $\boldsymbol{m\neq 0}$ ***y*** $\boldsymbol{\frac{2}{3}}$***, ran(A) = 3; si*** $\boldsymbol{m=\frac{2}{3}}$***, ran(A) = 2 y si m = 0, ran(A) = 1***

b) ¿A^{-1}, para m = 2?

Como $2 \neq 0$ y $\frac{2}{3}$, por lo calculado en el apartado anterior, $|A| \neq 0 \rightarrow \exists A^{-1}$

$$Si\ m = 2, \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -4 & 4 & 1 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

Sabemos que $|A| = m^2(2-3m) \rightarrow |A|_{m=2} = \left[m^2(2-3m)\right]_{m=2} = 2^2(2-3\cdot 2) = -16$

Calculemos A^{-1},

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -4 & 4 & 1 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{menores} \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -4 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -4 & 4 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -4 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -4 & 4 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -4 & -16 \\ -4 & 2 & 8 \\ -4 & 6 & 8 \end{pmatrix} \xrightarrow{adjuntos} \begin{pmatrix} 0 & 4 & -16 \\ 4 & 2 & -8 \\ -4 & -6 & 8 \end{pmatrix} \xrightarrow{traspuesta} \begin{pmatrix} 0 & 4 & -4 \\ 4 & 2 & -6 \\ -16 & -8 & 8 \end{pmatrix}$$

$$Finalmente, \quad A^{-1} = \frac{1}{-16}\begin{pmatrix} 0 & 4 & -4 \\ 4 & 2 & -6 \\ -16 & -8 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1/4 & 1/4 \\ -1/4 & -1/8 & 3/8 \\ 1 & 1/2 & -1/2 \end{pmatrix}$$

Solución: $$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1/4 & 1/4 \\ -1/4 & -1/8 & 3/8 \\ 1 & 1/2 & -1/2 \end{pmatrix}$$

c) ¿m? / / 2 A / = – 8

/ 2 A / = {por se A 3x3} 2^3 /A / = 8 /A / $\rightarrow$ 8 /A / = – 8 $\rightarrow$ /A / = – 1

Como $|A| = m^2(2-3m)$ debemos resolver:

$$m^2(2-3m) = -1 \rightarrow 2m^2 - 3m^3 = -1 \rightarrow -3m^3 + 2m^2 + 1 = 0$$

Resolviendo la ecuación por Ruffini:

$$\begin{array}{r|rrrr} & -3 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & & -3 & -1 & -+ \\ \hline & -3 & -1 & -1 & \lfloor 0 \rfloor \end{array}$$

Queda por resolver $-3m^2 - m - 1 = 0; \quad 3m^2 + m + 1 = 0$

$m = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4\cdot 3 \cdot 1}}{2\cdot 3} = \frac{-1 \pm \sqrt{-11}}{6}$ sin *soluciones reales*

La única solución es $m = 1$

Por tanto, / 2 A / = – 8 para m = 1.