Problema 3. Dadas las rectas $r:\begin{cases} x=z-1 \\ y=2-3z \end{cases}$ y $s:\begin{cases} x=4-5z \\ y=4z-3 \end{cases}$.

a) Indicar justificadamente la posición relativa de las rectas r y s. *(5 puntos)*

b) Hallar la ecuación de la recta l que pasa por el origen y corta a r y s. *(5 puntos)*

Solución:

a) ¿Posición relativa de r y s?

Nos interesa obtener un punto y un vector director de cada una de las rectas.

$$r:\begin{cases} x=z-1 \\ y=2-3z \end{cases} \rightarrow r:\begin{cases} x=-1+\lambda \\ y=2-3\lambda \\ z=\lambda \end{cases} \rightarrow r:\begin{cases} P_r(-1,2,0) \\ \vec{v_r}(1,-3,1) \end{cases}$$

$$s:\begin{cases} x=4-5z \\ y=4z-3 \end{cases} \rightarrow s:\begin{cases} x=4-5\mu \\ y=-3+4\mu \\ z=\mu \end{cases} \rightarrow s:\begin{cases} P_s(4,-3,0) \\ \vec{v_s}(-5,4,1) \end{cases}$$

Estudiamos la matriz $\left[\vec{v_r} \quad \vec{v_s} \;\vdots\; \overrightarrow{P_rP_s}\right]$, *es decir:* $M'=\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -5 & 5 \\ -3 & 4 & -5 \\ 1 & 1 & 0 \end{array}\right)$

Rango de M, { M es 3 x 2, luego máximo rango de M es 2}

$$|1| = 1 \neq 0$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -5 \\ -3 & 4 \end{vmatrix} = 4-15=-11\neq 0 \rightarrow ran(M)=2$$

Rango de M´, {M´ es 3 x 3, luego máximo rango de M´ es 3}.

El menor: $\begin{vmatrix} 1 & -5 & 5 \\ -3 & 4 & -5 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -15+25-20+5=-5\neq 0 \rightarrow ran(M')=3$

Como ran (M) =2, las rectas no son paralelas y como ran(M´) = 3, ***las rectas r y s se cruzan en el espacio.***

b) ¿ recta l? / l pasa por el origen y corta a las rectas r y s.

Construyamos los siguientes planos:

π: contiene a r y al origen y δ: contiene a s y al origen, por tanto l será la intersección de ellos.

Para obtener la ecuación de cada plano necesitamos un punto y dos vectores directores del plano.

Plano π,

$$\left.\begin{matrix} r:\begin{cases} P_r(-1,2,0) \\ \vec{v_r}(1,-3,1) \end{cases} \\ O(0,0,0) \end{matrix}\right\} \rightarrow \begin{cases} \text{punto } O(0,0,0) \\ \text{vectores } \begin{cases} \vec{v_r}(1,-3,1) \\ \overrightarrow{OP_r}(-1,2,0) \end{cases} \end{cases} \rightarrow \pi: \begin{vmatrix} x-0 & y-0 & z-0 \\ 1 & -3 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \end{vmatrix}=0$$

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & -3 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \end{vmatrix}=0 \rightarrow 2z-y-3z-2x=0 \rightarrow -2x-y-z=0 \rightarrow 2x+y+z=0$$

Plano δ,

$$s:\left.\begin{cases} P_s(4\,,-3\,,0) \\ \vec{v}_s(-5\,,4\,,1) \end{cases} \atop O\,(0{,}0{,}0)\right\} \rightarrow \begin{cases} \text{punto } O\,(0{,}0{,}0) \\ \text{vectores}\left\langle \begin{array}{l} \vec{v}_s(-5\,,4\,,1) \\ \overrightarrow{OP_s}\,(4\,,-3\,,0) \end{array}\right. \end{cases} \rightarrow \delta:\begin{vmatrix} x-0 & y-0 & z-0 \\ -5 & 4 & 1 \\ 4 & -3 & 0 \end{vmatrix}=0$$

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ -5 & 4 & 1 \\ 4 & -3 & 0 \end{vmatrix}=0 \rightarrow 15z+4y-16z+3x=0 \rightarrow 3x+4y-z=0$$

Finalmente, ***la ecuación de la recta l es*** $\begin{cases} 2x+y+z=0 \\ 3x+4y-z=0 \end{cases}$.