**Problema 4.** Dados los planos $\pi_1$: $2x - y - z + 4 = 0$ y $\pi_2 : \begin{cases} x = -1 + \alpha \\ y = 1 + \alpha + \beta \\ z = \alpha - \beta \end{cases}$ y la recta

$r : \dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y}{2} = \dfrac{z-2}{-1}$.

a) Calcular la posición relativa de $\pi_1$ y $\pi_2$. *(3 puntos)*

b) Calcular el punto $P'$ que es el simétrico al punto $P = (1,0,0)$ respecto del plano $\pi_1$. *(4 puntos)*

c) Calcular, si existe, el punto de intersección de $\pi_1$ y $r$. *(3 puntos)*

*Solución:*

*a) ¿Posición relativa de $\pi_1$ y $\pi_2$?*

*Obtengamos la ecuación general de $\pi_2$.*

$$\pi_2 : \begin{cases} punto\ (-1,1,0) \\ vectores \left\langle \begin{matrix} \vec{u}(1,1,1) \\ \vec{v}(0,1,-1) \end{matrix} \right. \end{cases} \rightarrow \pi_2 : \begin{vmatrix} x+1 & y-1 & z \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

$$(x+1)\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} - (y-1)\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} + z\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow (x+1)\cdot(-2) - (y-1)\cdot(-1) + z\cdot 1 = 0 \rightarrow$$

$$-2x - 2 + y - 1 + z = 0 \rightarrow -2x + y + z - 3 = 0 \rightarrow 2x - y - z + 3 = 0$$

*Los planos son:* $\begin{matrix} \pi_1 : 2x - y - z + 4 = 0 \\ \pi_2 : 2x - y - z + 3 = 0 \end{matrix}$, *como los coeficientes de x, y, z son proporcionales (iguales en este caso pero los términos independientes no proporcionales* $\left( \dfrac{2}{2} = \dfrac{-1}{-1} = \dfrac{-1}{-1} \neq \dfrac{4}{3} \right)$ *los planos son paralelos no coincidentes.*

***Solución: $\pi_1$ y $\pi_2$ son planos son paralelos no coincidentes.***

*b) ¿P´? / P´ es el simétrico de P ( 1, 0, 0 ) respecto de $\pi_1$?*

$\pi_1$: $2x - y - z + 4 = 0$

*Calculemos la ecuación de una recta, s, que pasa por P y es perpendicular a $\pi_1$.*

$$s : \begin{cases} punto\ P(1,0,0) \\ vector\ director\quad \vec{v}_s = \vec{n}_{\pi_1}(2,-1,-1) \end{cases} \rightarrow s : \begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = -\lambda \\ z = -\lambda \end{cases}$$

*Calculemos el punto M intersección de s y $\pi_1$.*

*Sustituimos los valores de x, y, z de la recta en la ecuación del plano:*

$2(1 + 2\lambda) - (-\lambda) - (-\lambda) + 4 = 0$

$2 + 4\lambda + \lambda + \lambda + 4 = 0;\quad 6\lambda + 6 = 0;\quad 6\lambda = -6;\quad \lambda = -1$

*Sustituyendo este valor de $\lambda$ en la ecuación de s obtendremos M.*

$$\begin{cases} x = 1 + 2(-1) = -1 \\ y = -(-1) = 1 \\ z = -(-1) = 1 \end{cases} \rightarrow M(-1,1,1)$$

$P'$ será el simétrico de $P$ respecto de $M$,

$$\frac{P+P'}{2}=M \quad \rightarrow \quad P'=2M-P=2\,(-1,1,1)-(1,0,0)=(-3,2,2)$$

Solución: **el simétrico de $P$ respecto de $\pi_1$ es $P'(-3\,,2\,,2\,)$.**

c) ¿$\pi_1 \cap r$?

Nos interesan las ecuaciones paramétricas de $r$.

$$r:\frac{x-1}{1}=\frac{y}{2}=\frac{z-2}{-1} \quad \rightarrow \quad r:\begin{cases} x=1+\lambda \\ y=2\lambda \\ z=2-\lambda \end{cases}$$

Sustituyendo en la ecuación del plano, ( $\pi_1$: $2x-y-z+4=0$ )

$2(1+\lambda)-2\lambda-(2-\lambda)+4=0;\quad 2+2\lambda-2\lambda-2+\lambda+4=0;\quad \lambda+4=0;\quad \lambda=-4$

Sustituyendo este valor de $\lambda$ en la ecuación de $r$ obtendremos el punto buscado.

$$\begin{cases} x=1+\lambda=1-4=-3 \\ y=2\lambda=2(-4)=-8 \\ z=2-(-4)=6 \end{cases}$$

Por tanto, **existe el punto de corte entre $r$ y $\pi_1$ y es el punto $(-3\,,-8\,,6\,)$.**