Problema 1. Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & m & 1 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$, $X=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix} m \\ 0 \\ 9 \end{pmatrix}$:

a) Estudiar cuando la ecuación matricial $A^2 X = B$ tiene solución en función del parámetro real m. *(4 puntos)*

b) Encontrar todas las soluciones de la ecuación anterior cuando estas existan. *(6 puntos)*

Solución:

a) Calculemos A^2,

$$A^2=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & m & 1 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & m & 1 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 2+2m & 2 \\ 0 & m^2+3 & m \\ 0 & 3m & 3 \end{pmatrix}$$

¿ran(A^2*) en función de* m*?*

Estudiemos $|A^2|$,

$$\left|A^2\right|=\begin{vmatrix} 1 & 2+2m & 2 \\ 0 & m^2+3 & m \\ 0 & 3m & 3 \end{vmatrix}=3(m^2+3)-3m\,m=3m^2+9-3m^2=9\neq 0 \quad\rightarrow\quad ran(A^2)=3$$

Como su rango es 3, que es el máximo posible, la ecuación $A^2X=B$ *tiene solución única.*

b) ¿Solución de la ecuación matricial?

Como $|A^2|\neq 0 \;\rightarrow\; \exists\left(A^2\right)^{-1}$ *(la matriz inversa de* A^2*).*

La solución X*, la obtendremos de la siguiente forma:*

$$A^2X=B;\ \left(A^2\right)^{-1}A^2X=\left(A^2\right)^{-1}B \quad\rightarrow\quad I\,X=\left(A^2\right)^{-1}B \quad\rightarrow\quad X=\left(A^2\right)^{-1}B$$

Calculemos $\left(A^2\right)^{-1}$,

$$A^2=\begin{pmatrix} 1 & 2+2m & 2 \\ 0 & m^2+3 & m \\ 0 & 3m & 3 \end{pmatrix}\xrightarrow{menores}\begin{pmatrix} \begin{vmatrix} m^2+3 & m \\ 3m & 3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & m \\ 0 & 3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & m^2+3 \\ 0 & 3m \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 2+2m & 2 \\ 3m & 3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 2+2m \\ 0 & 3m \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 2+2m & 2 \\ m^2+3 & m \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & m \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 2+2m \\ 0 & m^2+3 \end{vmatrix} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3m^2+9-3m^2 & 0 & 0 \\ 6+6m-6m & 3 & 3m \\ 2m+2m^2-2m^2-6 & m & m^2+3 \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 6 & 3 & 3m \\ 2m-6 & m & m^2+3 \end{pmatrix}\xrightarrow{adjuntos}\begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ -6 & 3 & -3m \\ 2m-6 & -m & m^2+3 \end{pmatrix}\xrightarrow{traspuesta}\begin{pmatrix} 9 & -6 & 2m-6 \\ 0 & 3 & -m \\ 0 & -3m & m^2+3 \end{pmatrix}$$

Finalmente, $$\left(A^2\right)^{-1}=\frac{1}{9}\begin{pmatrix} 9 & -6 & 2m-6 \\ 0 & 3 & -m \\ 0 & -3m & m^2+3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & -2/3 & (2m-6)/9 \\ 0 & 1/3 & -m/9 \\ 0 & -m/3 & (m^2+3)/9 \end{pmatrix}$$

$$Entonces,\ X=\begin{pmatrix} 1 & -2/3 & (2m-6)/9 \\ 0 & 1/3 & -m/9 \\ 0 & -m/3 & (m^2+3)/9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} m \\ 0 \\ 9 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} m+9\dfrac{2m-6}{9} \\ \dfrac{-m}{9}9 \\ \dfrac{m^2+3}{9}9 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3m-6 \\ -m \\ m^2+3 \end{pmatrix}$$

Solución: $$X=\begin{pmatrix} 3m-6 \\ -m \\ m^2+3 \end{pmatrix}$$