Problema 2. Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 2 & -1 & 0\end{pmatrix}$ y $C=\begin{pmatrix}0 & \alpha\\ -\alpha^2 & 0\end{pmatrix}$:

a) Obtener la matriz $(A\ B^T+I)^{-1}$, donde I es la matriz identidad de las dimensiones adecuadas para realizar la operación. *(6 puntos)*

b) Comprobar que $C^2=-\alpha^3 I$, donde I es la matriz identidad, y calcular C^{13}. *(4 puntos)*

Solución:

a) Cálculo de $A\,B^T+I$

$$B=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 2 & -1 & 0\end{pmatrix} \rightarrow B^T=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix} \rightarrow A\,B^T=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 2\\ 2 & -1\end{pmatrix}$$

$$A\,B^T+I=\begin{pmatrix}2 & 2\\ 2 & -1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & 2\\ 2 & 0\end{pmatrix}$$

Calculemos el determinante de $A\,B^T+I$

$$\left|A\,B^T+I\right|=\begin{vmatrix}3 & 2\\ 2 & 0\end{vmatrix}=-4\neq 0 \rightarrow \exists\left(A\,B^T+I\right)^{-1}$$

Calculemos la inversa de $A\,B^T+I$

$$A\,B^T+I=\begin{pmatrix}3 & 2\\ 2 & 0\end{pmatrix}\xrightarrow{menores}\begin{pmatrix}0 & 2\\ 2 & 3\end{pmatrix}\xrightarrow{adjuntos}\begin{pmatrix}0 & -2\\ -2 & 3\end{pmatrix}\xrightarrow{traspuesta}\begin{pmatrix}0 & -2\\ -2 & 3\end{pmatrix}$$

Finalmente, $\left(A\,B^T+I\right)^{-1}=\dfrac{1}{-4}\begin{pmatrix}0 & -2\\ -2 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 1/2\\ 1/2 & -3/4\end{pmatrix}$

Solución: $\left(A\,B^T+I\right)^{-1}=\begin{pmatrix}0 & 1/2\\ 1/2 & -3/4\end{pmatrix}$

b) ¿ $C^2=-\alpha^3 I$ *?*

$$C^2=\begin{pmatrix}0 & \alpha\\ -\alpha^2 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & \alpha\\ -\alpha^2 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\alpha^3 & 0\\ 0 & -\alpha^3\end{pmatrix}=-\alpha^3\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=-\alpha^3\ I$$

Comprobado que $C^2=-\alpha^3 I$

Cálculo de C^{13}*,*

Utilizamos el resultado obtenido antes ($C^2=-\alpha^3 I$ *)*

$$C^{13}=C^{12}\ C=\left(C^2\right)^6\ C=\left(-\alpha^3\ I\right)^6\ C=\alpha^{18}\ I^6\ C=\alpha^{18}\ I\ C=\alpha^{18}\ C=\alpha^{18}\begin{pmatrix}0 & \alpha\\ -\alpha^2 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & \alpha^{19}\\ -\alpha^{20} & 0\end{pmatrix}$$

Luego $C^{13}=\begin{pmatrix}0 & \alpha^{19}\\ -\alpha^{20} & 0\end{pmatrix}$