Problema 3. Dada la recta $r: \begin{cases} x-y=1 \\ x+2y+z=0 \end{cases}$ y los puntos $P=(0,0,3)$ y $Q=(2,2,\alpha)$, obtener:

a) Los valores del parámetro real α, si existen, para los son paralelas las rectas r y la recta que pasa por los puntos P y Q. *(6 puntos)*

b) La ecuación del plano perpendicular a r y que pasa por P. *(4 puntos)*

Solución:

a) ¿α? / $r \,//\, s$ (s es la recta que pasa por P y Q)

De la recta s conocemos $\begin{cases} \text{punto } P(0,0,3) \\ \text{vector director } \vec{v}_s = \overrightarrow{PQ} = (2,2,\alpha-3) \end{cases}$

recta r, ¿$\vec{v}_r$?

$$\vec{v}_r = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \vec{i}\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} - \vec{j}\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + \vec{k}\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -\vec{i} - \vec{j} + 3\vec{k} = (-1,-1,3)$$

$$r \,//\, s \quad si \quad \frac{2}{-1} = \frac{2}{-1} = \frac{\alpha-3}{3} \rightarrow -2 = \frac{\alpha-3}{3} \rightarrow \alpha - 3 = -6 \rightarrow \alpha = -3$$

Solución: las rectas r y s son paralelas cuando $\alpha = -3$

b) ¿Plano π? / $\pi \perp r$ y $P \in \pi$

Representamos por $\vec{n}_\pi$ el vector perpendicular al plano π.

Como $\pi \perp r \rightarrow \vec{n}_\pi = \vec{v}_r = (-1,-1,3)$

La ecuación del plano π será: $-x-y+3z+D=0$

Como el punto $P(0,0,3) \in \pi \rightarrow -0-0+3\cdot 3+D=0;\ 9+D=0;\ D=-9$

Luego $\pi: -x-y+3z-9=0$ *o bien* $x+y-3z+9=0$

Solución: la ecuación del plano pedido es $x+y-3z+9=0$.