Problema 4. Dada la recta $r:\begin{cases}5x+y+7z=16\\9x-y+7z=12\end{cases}$ y el punto $P=(0,5,2)$ se pide:

a) Comprobar que el punto $Q=(2,6,0)$ pertenece a la recta r y encontrar la recta s que pasa por los puntos P y Q. *(2 puntos)*

b) Obtener el ángulo que forman la recta r y la recta s. *(3 puntos)*

c) Obtener la proyección ortogonal del punto P en la recta r. *(5 puntos)*

Solución:

a) ¿$Q \in r$?

Comprobemos que el punto Q(2,6,0) cumple las ecuaiones de la recta r.

$$\begin{cases}5.2+6+7.0=16\\9.2-6+7.0=12\end{cases} \rightarrow \begin{cases}16=16 \quad Sí\\12=12 \quad Sí\end{cases} \rightarrow Q\in r$$

¿recta s? / s es la recta que pasa por P y Q.

$$\text{De la recta } s \text{ conocemos } \begin{cases}\text{punto} \quad P(0,5,2)\\ \text{vector director } \vec{v}_s=\overrightarrow{PQ}=(2,1,-2)\end{cases} \rightarrow s:\frac{x-0}{2}=\frac{y-5}{1}=\frac{z-2}{-2}$$

$$Luego \quad s:\frac{x}{2}=\frac{y-5}{1}=\frac{z-2}{-2}$$

b) ¿Ángulo que forman r y s? $(\widehat{r,s})$

El ángulo lo obtendremos a partir de los vectores directores de las dos rectas.

De la recta s obtuvimos su vector director en el apartado anterior: $\vec{v}_s=(2,1,-2)$

Como de la recta r tenemos su ecuación implícita, el cálculo de su vector director es:

$$\vec{v}_r=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\5 & 1 & 7\\9 & -1 & 7\end{vmatrix}=\vec{i}\begin{vmatrix}1 & 7\\-1 & 7\end{vmatrix}-\vec{j}\begin{vmatrix}5 & 7\\9 & 7\end{vmatrix}+\vec{k}\begin{vmatrix}5 & 1\\9 & -1\end{vmatrix}=14\,\vec{i}+28\,\vec{j}-14\,\vec{k}=(14,28,-14)\approx(1,2,-1)$$

$$\cos(\widehat{r,s})=\frac{\left|\vec{v}_r\cdot\vec{v}_s\right|}{\left|\vec{v}_r\right|\left|\vec{v}_s\right|}=\frac{\left|(-1,-2,1)\cdot(2,1,-2)\right|}{\sqrt{(-1)^2+(-2)^2+1^2}\,\sqrt{2^2+1^2+(-2)^2}}=\frac{\left|-2-2-2\right|}{\sqrt{6}\,\sqrt{9}}=\frac{6}{3\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{6}}{3}$$

$$(\widehat{r,s})=arc\cos\left(\frac{\sqrt{6}}{3}\right)=35'2644^{\circ}$$

Solución: las rectas r y s forman un ángulo de 35´2644º.

c) ¿Proyección ortogonal del punto P en la recta r?

Los cálculos a realizar son:

i) Plano (π) que contiene a P y es perpendicular a r.

Representamos por $\vec{n}_\pi$ *el vector perpendicular al plano* π.

$$Como \quad \pi\perp r \rightarrow \vec{n}_\pi=\vec{v}_r=(1,2,-1)$$

La ecuación del plano π será: $x+2y-z+D=0$

Como el punto $P(0,5,2) \in \pi \;\rightarrow\; 0 + 2 \cdot 5 - 2 + D = 0; \;\; 8 + D = 0; \;\; D = -8$

Luego $\pi: x + 2y - z - 8 = 0$

ii) Corte entre π *y* r.

Nos interesa tener la ecuación vectorial de la recta r.

De los dos apartados anteriores, de la recta conocemos

$$\begin{cases} punto \quad Q(2,6,0) \\ vector\ director\ \vec{v}_r = (1,2,-1) \end{cases} \rightarrow \quad r: \begin{cases} x = 2 + \lambda \\ y = 6 + 2\lambda \quad \lambda \in \Re \\ z = -\lambda \end{cases}$$

Sustituyendo los valores de x, y, z en la ecuación de π,

$2 + \lambda + 2(6 + 2\lambda) - (-\lambda) - 8 = 0; \quad 2 + \lambda + 12 + 4\lambda + \lambda - 8 = 0; \quad 6 + 6\lambda = 0; \quad 6\lambda = -6;$
$\lambda = -1$

Sustituyendo este valor de λ *en la ecuación de* r $\begin{cases} x = 2 + (-1) = 1 \\ y = 6 + 2(-1) = 4, \ \ punto\ (1,4,1) \\ z = -(-1) = 1 \end{cases}$

Solución: la proyección ortogonal del punto P en la recta r es el punto (1,4,1).